

هندسه (۳)

درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید. (۱ نمره)

الف) اگر ماتریس A وارون پذیر باشد و $A^T - AB = \bar{O}$ آن گاه $A = B$.

ب) برای ماتریس‌های $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ خاصیت جابه‌جایی وجود دارد.

پ) اگر صفحه P به گونه‌ای باشد که هر دو تکه بالایی و پایینی سطح مخروطی را قطع کند و شامل محور آن باشد، در این صورت فصل مشترک صفحه و سطح مخروطی، هذلولی است.

ت) رابطه $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5 = 0$ دایره‌ای به مرکز $O(1, -2)$ است.

راهنمای تصحیح >> الف) درست (۰/۲۵) (صفحه ۲۲)

ب) درست (۰/۲۵) (صفحه ۱۹)

پ) نادرست (۰/۲۵) (صفحه ۳۵)

ت) نادرست (۰/۲۵) (صفحه ۴۱ و ۴۲)

ماتریس‌هایی که هر دو به صورت $\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$ یا هر دو به صورت $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ باشند، تعویض پذیرند و برای آن‌ها خاصیت جابه‌جایی وجود دارد. یعنی:

$$AB = BA$$

درس Box

الف) رابطه $A^T - AB = \bar{O}$ را از سمت چپ در A^{-1} ضرب می‌کنیم. ✓ پاسخ خیلی تشریحی

$$A^{-1}(A^T - AB) = \bar{O} \Rightarrow A^{-1}A^T - A^{-1}AB = \bar{O} \Rightarrow A - B = \bar{O} \Rightarrow A = B$$

ب) طبق نکته موجود در درس Box، ماتریس‌های به فرم داده شده خاصیت جابه‌جایی یا همان تعویض پذیری را دارند. (اگر دانش‌آموز AB و BA را به دست بیاورد و نتیجه بگیرد نیز درست است.)

پ) برای این که سطح مقطع توضیح داده شده در صورت مسئله هذلولی باشد، صفحه P نباید شامل محور باشد. اگر صفحه P شامل محور باشد، سطح مقطع حاصل، دو خط متقاطع می‌شود.

ت) در رابطه داده شده $A^2 + B^2 - 4C = 4 + 16 - 20 = 0$ را به دست می‌آوریم:

پس رابطه فوق دایره نیست و فقط یک نقطه می‌باشد.

در جای خالی، عدد یا عبارت مناسب قرار دهید. (۱ نمره)

الف) اگر A ماتریس مربعی از مرتبه ۳ باشد که $|A| = -2$ ، پس دترمینان ماتریس $\frac{A^2}{|A^{-1}|}$ برابر است.

ب) اگر دستگاه $\begin{cases} (a+1)x - 2y = 3 \\ (2a-1)x + y = 1 \end{cases}$ جواب نداشته باشد، a باید برابر باشد.

پ) نقطه A به فاصله ۲ از خط d مفروض است، اگر ۳ نقطه در صفحه باشد که از نقطه A به فاصله ۳ و از خط d به فاصله m باشد، m برابر است با

ت) طول خط‌المركزین دو دایره به شعاع‌های R و $2R$ که فقط یک مماس مشترک دارند برابر با است.

راهنمای تصحیح >> الف) -32 (۰/۲۵) (صفحه ۳۱)

ب) $\frac{1}{5}$ (۰/۲۵) (صفحه ۲۶)

پ) ۱ (۰/۲۵) (صفحه ۳۸)

ت) $2R$ (۰/۲۵) (صفحه ۴۴)

درس Box

در جدول زیر وضعیت دو دایره و تعداد مماس‌های مشترک آن‌ها بررسی شده است.

وضعیت دو دایره نسبت به هم	تعداد مماس مشترک‌های خارجی	تعداد مماس مشترک‌های داخلی	رابطه بین خط‌المركزین و شعاع‌ها
متخارج	۲	۲	$d > R + R'$
مماس خارج	۲	۱	$d = R + R'$
مقاطع	۲	۰	$ R - R' < d < R + R'$
مماس داخل	۱	۰	$d = R - R' $
متداخل	۰	۰	$0 \leq d < R - R' $

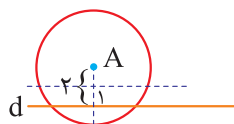
پاسخ خیلی تشریحی ✓ الف) با توجه به این که ماتریس A مربعی و از مرتبه ۳ می‌باشد، پس:

$$\left| \frac{A^2}{|A^{-1}|} \right| = ||A| |A^2| = |-2 A^2| = (-2)^3 |A|^2 = -8 \times (-2)^2 = -8 \times 4 = -32$$

ب) شرط این که دستگاه دو معادله دو مجهول، جواب نداشته باشد عبارت است از:

$$\frac{a+1}{2a-1} = \frac{-2}{1} \neq \frac{3}{1} \Rightarrow a+1 = -4a+2 \Rightarrow 5a=1 \Rightarrow a=\frac{1}{5}$$

پ) با توجه به شکل زیر مشخص می‌شود که m باید ۱ باشد.



ت) با توجه به جدول موجود در درس Box، دو دایره مماس داخل هستند پس:

$$d = |R - R'| = |2R - R| = 2R$$

در هر مورد گزینه درست را انتخاب کرده و در پاسخ برگ بنویسید. (۱/۲۵ نمره)

الف) اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & 2a \\ a^2 + b & 4 \end{bmatrix}$ و B ماتریس 2×2 با ضابطه $b_{ij} = i^2 - j$ باشد و $A = 2B$ ، مقدار ab کدام است؟

- (۱) ۵
(۲) -۵
(۳) ۴
(۴) -۴

ب) خط $y + x = 3$ نسبت به دایره $x^2 + y^2 - 2x = 0$ کدام وضع را دارد؟

- (۱) قطع نمی کند
(۲) مماس است
(۳) متقاطع است
(۴) قابل تشخیص نیست

پ) مکان هندسی مراکز دایره‌هایی با شعاع ثابت که بر دایره $C(O, R)$ مماس خارج هستند، کدام است؟

- (۱) یک نقطه
(۲) یک خط
(۳) یک دایره
(۴) یک صفحه

راهنمای تصحیح >> الف) گزینه «۲» (۰/۵) (صفحه ۱۳)

ب) گزینه «۱» (۰/۵) (صفحه ۴۵)

پ) گزینه «۳» (۰/۲۵) (صفحه ۳۹)

پاسخ خیلی تشریحی ✓ الف) ابتدا ماتریس B را به دست می آوریم.

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-1 & 1-2 \\ 4-1 & 4-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow 2B = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$$

$$2a = -2 \Rightarrow a = -1$$

اگر $A = 2B$ باشد، پس:

$$a^2 + b = 6 \Rightarrow 1 + b = 6 \Rightarrow b = 5$$

$$ab = -1 \times 5 = -5$$

بنابراین:

$$x^2 + y^2 - 2x = 0 \Rightarrow O(1, 0)$$

ب) ابتدا مرکز و شعاع دایره را به دست می آوریم:

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 0 - 0} = 1$$

حال فاصله مرکز دایره تا خط یعنی OH را به دست می آوریم.

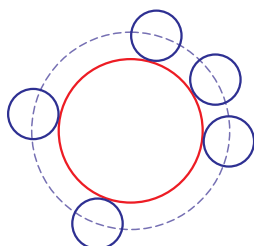
$$OH = \frac{|y + x - 3|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|0 + 1 - 3|}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$OH > R$$

با توجه به این که $OH = \sqrt{2}$ و $R = 1$ می باشد، پس:

بنابراین این خط دایره را قطع نمی کند.

پ) طبق شکل زیر مراکز این دایره‌ها که شعاع ثابت دارند، روی یک دایره قرار دارد.



در هر کدام از موارد زیر یک کلمه فارسی وجود دارد که آن عبارت را اشتباه کرده است. آن کلمه را پیدا کرده و در پاسخ‌برگ به همراه کلمه درست بنویسید. (۱ نمره)

الف) ماتریس به فرم $A_{1 \times n}$ را ماتریس ستونی نامند.

ب) اگر صفحه P با مولد d موازی باشد، و از رأس مخروط عبور کند، در این صورت فصل مشترک صفحه و سطح مخروطی یک سهمی است.

راهنمای تصحیح >> الف) کلمه غلط: ستونی، کلمه درست: سطری (صفحه ۱۲) (۵/۰)

ب) کلمه غلط: کند، کلمه درست: نکند (صفحه ۳۵) (۵/۰) یا کلمه غلط: سهمی، کلمه درست: خط (صفحه ۳۵) (۵/۰)

(هر دو پاسخ از دانش‌آموز قابل پذیرش است.)

اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های ماتریس A^{2^0} را به دست آورید. (۲۵/۱ نمره)

راهنمای تصحیح

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (0/25)$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad (0/25)$$

$$\Rightarrow A^{2^0} = \begin{bmatrix} 2^{19} & 0 & 2^{19} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{19} & 0 & 2^{19} \end{bmatrix} \quad (0/5)$$

$$S = 4 \times 2^{19} + 1 = 2^{21} + 1 \quad (0/25)$$

پس:

(صفحه ۲۰)

برای پیدا کردن توان‌های بزرگ در یک ماتریس، چند توان اولیه را به دست می‌آوریم و در آن‌ها به دنبال نظم و الگوی مشخص می‌گردیم.

درس‌Box

پاسخ خیلی تشریحی ✓ ابتدا ماتریس‌های A^2 ، A^3 و A^4 را تعیین می‌کنیم.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

بنابراین مشخص می‌شود که:

$$A^n = \begin{bmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{bmatrix}$$

پس:

$$A^{2^0} = \begin{bmatrix} 2^{19} & 0 & 2^{19} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{19} & 0 & 2^{19} \end{bmatrix}$$

$$S = 4 \times 2^{19} + 1 = 2^{21} + 1$$

مجموع درایه‌ها عبارت است از:

۶ اگر $2A = \begin{bmatrix} 4 & |A^{-1}| \\ |2A| & 2|A| \end{bmatrix}$ باشد، دترمینان ماتریس $4A - I$ را بیابید. (۱/۵ نمره)

راهنمای تصحیح

$$|2A| = \begin{vmatrix} 4 & |A^{-1}| \\ |2A| & 2|A| \end{vmatrix} \Rightarrow 4|A| = 4 \times 2|A| - |A^{-1}| \times 4|A| \quad (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow 4|A| = 8|A| - 4 \Rightarrow -4|A| = -4 \Rightarrow |A| = 1, |A^{-1}| = 1 \quad (۰/۲۵)$$

$$2A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow 4A - I = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 8 & 3 \end{bmatrix} \quad (۰/۲۵)$$

$$|4A - I| = 21 - 16 = 5 \quad (۰/۲۵)$$

(صفحه ۳۰)

پاسخ خیلی تشریحی ✓ ابتدا دترمینان ماتریس داده شده را حساب می کنیم.

$$2A = \begin{bmatrix} 4 & |A^{-1}| \\ |2A| & 2|A| \end{bmatrix} \Rightarrow |2A| = 4 \times 2|A| - |A^{-1}| \times |2A|$$

$$\Rightarrow 4|A| = 8|A| - \frac{1}{|A|} \times 4|A| \Rightarrow -4|A| = -4 \Rightarrow |A| = 1 \Rightarrow |A^{-1}| = 1$$

ماتریس $2A$ را به دست می آوریم:

$$2A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

ماتریس $4A - I$ عبارت است از:

$$4A - I = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$$

$$|4A - I| = 21 - 16 = 5$$

پس:

دستگاه مقابل را به روش ماتریس وارون حل کنید. (۱/۵ نمره)

۷

$$\begin{cases} 2x^2 + 3\sqrt{y} = 11 \\ x^2 - 2\sqrt{y} = 2 \end{cases}$$

راهنمای تصحیح

$$\begin{cases} 2x^2 + 3\sqrt{y} = 11 \\ x^2 - 2\sqrt{y} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^2 \\ \sqrt{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (۰/۲۵)$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{-4-3} \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -1 & +2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{7} \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad (۰/۵)$$

$$\underbrace{X = A^{-1}B}_{(۰/۲۵)} \Rightarrow \begin{bmatrix} x^2 \\ \sqrt{y} \end{bmatrix} = -\frac{1}{7} \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11 \\ 2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{7} \begin{bmatrix} -28 \\ -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \\ \sqrt{y} = 1 \Rightarrow y = 1 \end{cases} \quad (۰/۲۵)$$

(صفحه ۲۴)

پاسخ خیلی تشریحی ✓ می‌توانیم دستگاه را با استفاده از تغییر متغیر نیز حل کنیم ولی با توجه به شرایط مسئله لزومی به این کار نیست. فرم ماتریسی دستگاه عبارت است از:

$$\begin{cases} 2x^2 + 3\sqrt{y} = 11 \\ x^2 - 2\sqrt{y} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^2 \\ \sqrt{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ماتریس ضرایب $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ است، پس:

$$A^{-1} = \frac{1}{-4-3} \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{7} \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

حل دستگاه عبارت است از:

$$X = A^{-1}B = -\frac{1}{7} \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11 \\ 2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{7} \begin{bmatrix} -28 \\ -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x^2 \\ \sqrt{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

پس:

$$\sqrt{y} = 1 \Rightarrow y = 1$$

در ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & x & 2 \end{bmatrix}$ ، عضو a_{31} را دو برابر کرده و از عضو a_{12} یک واحد کم می‌کنیم. دترمینان

ماتریس حاصل از دو برابر دترمینان A سه واحد بیشتر می‌شود، مقدار x را بیابید. (۵/۱ نمره)

راهنمای تصحیح

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & x & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow |A'| = 1(2-x) - 1(4-2) + 1(2x-2) = 2-x-2+2x-2 = x-2 \quad (۵/۰)$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & x & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 1(2-x) - 2(4-1) + 1(2x-1) = 2-x-6+2x-1 = x-5 \quad (۵/۰)$$

$$|A'| = 2|A| + 3 \Rightarrow x-2 = 2(x-5) + 3 \Rightarrow x-2 = 2x-10+3 \Rightarrow x=5 \quad (۵/۰)$$

(صفحه ۲۸)

پاسخ خیلی تشریحی ✓ ابتدا تغییرات گفته شده را در ماتریس A اعمال می‌کنیم تا مثلاً ماتریس A' حاصل شود.

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & x & 2 \end{bmatrix}$$

دترمینان‌های ماتریس‌های A و A' را حساب می‌کنیم.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & x & 2 \end{vmatrix} = 1(2-x) - 2(4-1) + 1(2x-1) = 2-x-6+2x-1 = x-5$$

$$|A'| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & x & 2 \end{vmatrix} = 1(2-x) - 1(4-2) + 1(2x-2) = 2-x-2+2x-2 = x-2$$

رابطه بین دترمینان ماتریس‌های A و A' عبارت است از:

$$|A'| = 2|A| + 3 \Rightarrow x-2 = 2(x-5) + 3 \Rightarrow x-2 = 2x-10+3 \Rightarrow x=5$$

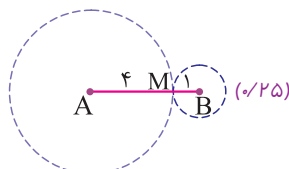
۹

نقاط A و B به فاصله ۵ واحد از هم در صفحه مفروضند. اگر فقط یک نقطه مانند M باشد که تفاضل فاصله این

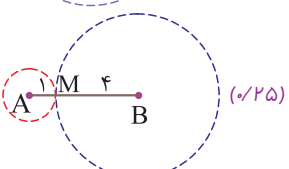
نقطه از A و B برابر ۳ واحد باشد، با رسم شکل وضعیت نقطه M نسبت به A و B را مشخص کنید. (۱ نمره)

راهنمای تصحیح

حالت اول:
$$\begin{cases} MA - MB = 3 \\ MA + MB = 5 \end{cases} \Rightarrow 2MA = 8 \Rightarrow MA = 4, MB = 1 \quad (۰/۲۵)$$



حالت دوم:
$$\begin{cases} MB - MA = 3 \\ MA + MB = 5 \end{cases} \Rightarrow 2MB = 8 \Rightarrow MB = 4, MA = 1 \quad (۰/۲۵)$$



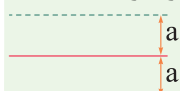
(صفحه ۳۹)

درس Box

(۱) مکان هندسی نقاطی که از نقطه A به فاصله مشخص R باشند، دایره به مرکز A و شعاع R است.

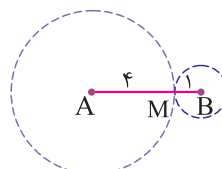


(۲) مکان هندسی نقاطی که از خط d به فاصله مشخص a باشند، دو خط موازی به فاصله a در اطراف d است.

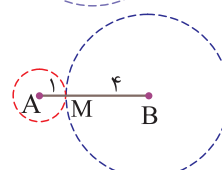


پاسخ خیلی تشریحی ✓ برای این که تنها یک نقطه وجود داشته باشد که تفاضل فواصلش تا A و B برابر ۳ باشد لازم است کمان‌هایی که به مراکز A و B رسم می‌شوند بر هم مماس باشند پس یکی از دو حالت زیر رخ می‌دهد:

حالت اول:
$$\begin{cases} MA - MB = 3 \\ MA + MB = 5 \end{cases} \Rightarrow 2MA = 8 \Rightarrow MA = 4, MB = 1$$



حالت دوم:
$$\begin{cases} MB - MA = 3 \\ MA + MB = 5 \end{cases} \Rightarrow 2MB = 8 \Rightarrow MB = 4, MA = 1$$

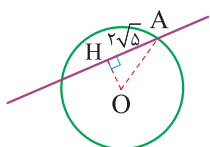


قطرهای دایره‌ای به صورت $(m-2)x + (m+1)y = 6$ می‌باشد. اگر این دایره از خط $2x + y = 3$ وتری به

طول $4\sqrt{5}$ جدا کند، معادله دایره را بنویسید. (۱/۵ نمره)

راهنمای تصحیح

$$\begin{cases} m=2 \Rightarrow 0+3y=6 \Rightarrow y=2 \\ m=-1 \Rightarrow -3x+0=6 \Rightarrow x=-2 \end{cases} \Rightarrow O(-2, 2) \quad (0/5)$$



$$OH = \frac{|2x + y - 3|}{\sqrt{4+1}} = \frac{|-4+2-3|}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \quad (0/2.5)$$

$$R^2 = (\sqrt{5})^2 + (2\sqrt{5})^2 = 5 + 20 \Rightarrow R = 5 \quad (0/2.5)$$

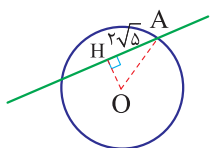
$$\text{معادله دایره: } (x+2)^2 + (y-2)^2 = 25 \quad (0/5)$$

(صفحه ۴۳)

پاسخ خیلی تشریحی ✓ ابتدا مرکز دایره را از روی معادله قطرهای دایره با حدس دو مقدار برای m به دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} m=2 &\Rightarrow 0+3y=6 \Rightarrow y=2 \\ m=-1 &\Rightarrow -3x+0=6 \Rightarrow x=-2 \end{aligned} \Rightarrow O(-2, 2)$$

با توجه به شکل مقابل، ابتدا فاصله OH را به دست می‌آوریم:



$$OH = \frac{|2x + y - 3|}{\sqrt{4+1}} = \frac{|-4+2-3|}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

در مثلث OHA از رابطه فیثاغورس استفاده می‌کنیم:

$$OA^2 = (\sqrt{5})^2 + (2\sqrt{5})^2 \Rightarrow R^2 = 5 + 20 \Rightarrow R = 5$$

$$(x+2)^2 + (y-2)^2 = 25$$

پس معادله دایره عبارت است از:

وضعیت دو دایره $C: x^2 + y^2 - 2x + 2y + 1 = 0$ و $C': (x+2)^2 + (y-2)^2 = 4$ را نسبت به هم مشخص

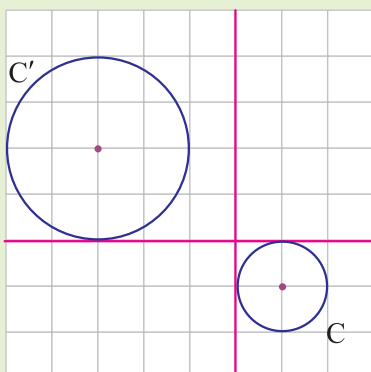
۱۱

کنید. (۷/۵ نمره)

راهنمای تصحیح « راه حل اول:

$$\left. \begin{array}{l} \underbrace{O(1, -1)}_{(0/25)} \quad \underbrace{O'(-3, 2)}_{(0/25)} \Rightarrow \underbrace{OO' = 5}_{(0/25)} \\ \underbrace{r = 1}_{(0/25)} \quad \underbrace{r' = 2}_{(0/25)} \end{array} \right\} \xrightarrow{OO' > r + r'} \underbrace{\text{دو دایره متخارج هستند}}_{(0/25)}$$

راه حل دوم:



رسم دقیق دایره C (۷/۵)

رسم دقیق دایره C' (۷/۵)

نوشتن «دو دایره متخارج» (۷/۲۵) (صفحه ۴۴)

توجه ۱) اگر دانش آموزی ثابت کند که دو دایره هیچ نقطه مشترکی ندارند، تنها نصف بارم به او تعلق گیرد.
۲) اگر دانش آموزی بدون ارائه راه حل یا رسم شکل، فقط کلمه «متخارج» را بنویسد. (۷/۲۵) نمره منظور شود.

دایره $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 1 = m$ بر دایره‌ای به مرکز $O(-1, 3)$ و شعاع ۲ مماس داخل است. m را بیابید. (۷/۵ نمره)

۱۲

راهنمای تصحیح

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 1 - m = 0 \Rightarrow \begin{cases} O'(2, -1) \text{ (۰/۲۵)} \\ R' = \frac{1}{2} \sqrt{16 + 4 + 4 + 4m} = \frac{1}{2} \sqrt{24 + 4m} = \sqrt{6 + m} \text{ (۰/۲۵)} \end{cases}$$

$$d = OO' = \sqrt{(2+1)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{25} = 5 \text{ (۰/۲۵)}$$

$$d = |R - R'| \Rightarrow 5 = |\sqrt{6 + m} - 2| \text{ (۰/۲۵)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{6 + m} - 2 = 5 \Rightarrow \sqrt{6 + m} = 7 \Rightarrow m + 6 = 49 \Rightarrow m = 43 \text{ قق (۰/۲۵)} \\ \sqrt{6 + m} - 2 = -5 \Rightarrow \sqrt{6 + m} = -3 \text{ جواب ندارد (۰/۲۵)} \end{cases}$$

(صفحه ۴۳)

پاسخ خیلی تشریحی ✓ ابتدا مرکز و شعاع دایره را به دست می‌آوریم.

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 1 - m = 0 \Rightarrow \begin{cases} O(2, -1) \\ R = \frac{1}{2} \sqrt{16 + 4 + 4 + 4m} = \frac{1}{2} \sqrt{24 + 4m} = \sqrt{6 + m} \end{cases}$$

$$OO' = d = \sqrt{(2+1)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{25} = 5 \quad \text{طول خط‌المركزين دو دایره را به دست می‌آوریم:}$$

$$d = |R - R'| \Rightarrow 5 = |\sqrt{6 + m} - 2| \quad \text{برای این‌که دو دایره مماس داخل باشند، لازم است:}$$

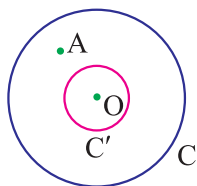
پس:

$$\sqrt{6 + m} - 2 = \pm 5 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{6 + m} = 7 \Rightarrow 6 + m = 49 \Rightarrow m = 43 \text{ قق} \\ \sqrt{6 + m} = -3 \text{ جواب ندارد} \end{cases}$$

در شکل مقابل دایره $C(O, 2m)$ و $C'(O, m)$ رسم شده‌اند. اگر نقاط $A(1, 2)$ و $O(2, 1)$ باشد، حدود m

۱۳

کدام است؟ (۱ نمره)



راهنمای تصحیح >>

$$OA = \sqrt{(1-2)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{2} \quad (۰/۲۵)$$

$$\text{نقطه } A \text{ درون دایره } C \Rightarrow OA < 2m \Rightarrow \sqrt{2} < 2m \Rightarrow m > \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (۰/۲۵)$$

$$\text{نقطه } A \text{ بیرون دایره } C' \Rightarrow OA > m \Rightarrow \sqrt{2} > m \Rightarrow m < \sqrt{2} \quad (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} < m < \sqrt{2} \quad (۰/۲۵)$$

(صفحه ۴۶)

پاسخ خیلی تشریحی ✓ ابتدا فاصله O تا A یعنی طول پاره خط OA را به دست می‌آوریم.

$$OA = \sqrt{(1-2)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$OA < R \Rightarrow \sqrt{2} < 2m \Rightarrow m > \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$OA > R' \Rightarrow \sqrt{2} > m \Rightarrow m < \sqrt{2}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} < m < \sqrt{2}$$

نقطه A درون دایره C است، پس:

و این نقطه بیرون دایره C' است، یعنی:

بنابراین:

۱۴ با استفاده از مربع کامل کردن، ثابت کنید مرکز دایره $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ نقطه $O(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2})$ است. (۱ نمره)

راهنمای تصحیح >>

$$x^2 + Ax + y^2 + By + C = 0 \Rightarrow x^2 + Ax + \frac{A^2}{4} - \frac{A^2}{4} + y^2 + By + \frac{B^2}{4} - \frac{B^2}{4} + C = 0 \quad (۰/۵)$$

$$\Rightarrow (x + \frac{A}{2})^2 + (y + \frac{B}{2})^2 = \frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - C \quad (۰/۲۵) \Rightarrow O(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}) \quad (۰/۲۵)$$

(صفحه ۴۱)

۱) در دایره به معادله $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ ، مختصات مرکز $O(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2})$ است و شعاع دایره از

$$\text{رابطه } R = \frac{1}{2} \sqrt{A^2 + B^2 - 4C} \text{ محاسبه می شود.}$$

۲) در رابطه $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$:

رابطه، یک دایره است. $\Rightarrow A^2 + B^2 - 4C > 0$ اگر

رابطه، یک نقطه است. $\Rightarrow A^2 + B^2 - 4C = 0$ اگر

رابطه، شکل حقیقی نیست. $\Rightarrow A^2 + B^2 - 4C < 0$ اگر

درس Box

پاسخ خیلی تشریحی ✓ ابتدا معادله دایره را مرتب می کنیم:

$$x^2 + Ax + y^2 + By + C = 0$$

برای مربع کامل شدن جملات $\frac{A^2}{4}$ و $\frac{B^2}{4}$ را اضافه و کم می کنیم:

$$x^2 + Ax + \frac{A^2}{4} - \frac{A^2}{4} + y^2 + By + \frac{B^2}{4} - \frac{B^2}{4} + C = 0$$

$$(x + \frac{A}{2})^2 + (y + \frac{B}{2})^2 = \frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - C$$

پس:

$$O(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2})$$

در معادله متقارن فوق:

۱۵

دو دایره در ناحیه اول وجود دارد که از نقطه $A(2, 4)$ گذشته و بر هر دو محور مختصات مماس است. شعاع‌های

این دو دایره را مشخص کنید. (۱/۵ نمره)

راهنمای تصحیح

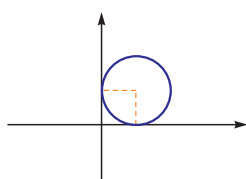
$$O(R, R) \Rightarrow (x - R)^2 + (y - R)^2 = R^2 \Rightarrow (2 - R)^2 + (4 - R)^2 = R^2$$

$$4 + R^2 - 4R + 16 + R^2 - 8R = R^2 \Rightarrow R^2 - 12R + 20 = 0 \Rightarrow (R - 2)(R - 10) = 0$$

$$\Rightarrow R = 2, R = 10$$

(صفحه ۴۰)

پاسخ خیلی تشریحی ✓ طبق شکل، دایره‌ای که در ناحیه اول بر هر دو محور مختصات مماس باشد، مرکزی با مختصات $O(R, R)$ دارد و شعاع آن نیز R است.



$$(x - R)^2 + (y - R)^2 = R^2$$

پس معادله دایره عبارت است از:

$$(2 - R)^2 + (4 - R)^2 = R^2$$

این دایره از نقطه $A(2, 4)$ می‌گذرد، پس:

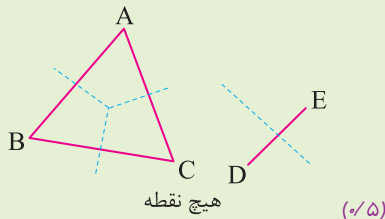
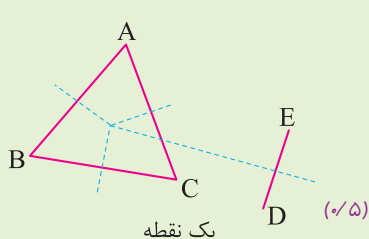
$$4 + R^2 - 4R + 16 + R^2 - 8R = R^2 \Rightarrow R^2 - 12R + 20 = 0 \Rightarrow (R - 2)(R - 10) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} R = 2 \\ R = 10 \end{cases}$$

نقاط A, B, C, D و E در صفحه مفروضند. نقطه یا نقاطی در صفحه را مشخص کنید که از A, B و C به یک

فاصله و از نقاط D و E به یک فاصله باشند. (بحث کنید) (۱ نمره)

راهنمای تصحیح

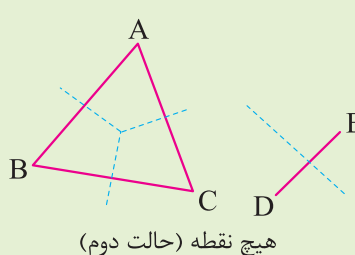
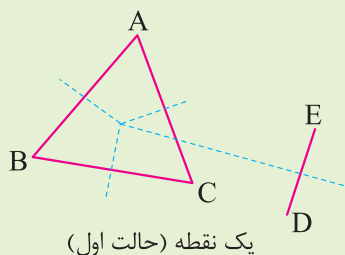


(صفحه ۳۹)

پاسخ خیلی تشریحی ✓ مکان هندسی نقاطی که از هر دو نقطه دلخواه به یک فاصله باشد روی عمودمنصف نقاط است و برای سه نقطه که تشکیل یک مثلث می‌دهند محل برخورد عمودمنصف‌های اضلاع یا مرکز دایره محیطی است. پس دو حالت زیر می‌تواند رخ دهد.

حالت اول: اگر عمودمنصف ED از محل هم‌رسی عمودمنصف‌های اضلاع مثلث ABC عبور کند.

حالت دوم: اگر عمود منصف ED از محل هم‌رسی عمودمنصف‌های اضلاع مثلث ABC عبور نکند.



نقاط A, B, C, D و E در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای در این صفحه بیابید که از A و B به یک فاصله و از C و D نیز به یک فاصله باشد (بحث کنید). (۱/۵ نمره) (سوال ۹ - نوبت اول خرداد ۱۴۰۴) (صفحه ۳۹)

پاسخ: مکان هندسی نقاطی که فاصله آن‌ها از نقاط A و B به یک فاصله باشند، روی عمودمنصف AB قرار دارند. (۰/۲۵)

مکان هندسی نقاطی که فاصله آن‌ها از نقاط C و D به یک فاصله باشند، روی عمودمنصف CD قرار دارند. (۰/۲۵)

محل برخورد دو عمودمنصف جواب مسأله است. (۰/۲۵)

بحث: حالت اول - اگر دو عمودمنصف متقاطع باشند، مسأله یک جواب دارد. (۰/۲۵)

حالت دوم - اگر دو عمودمنصف موازی باشند، مسأله جواب ندارد. (۰/۲۵)

حالت سوم - اگر دو عمودمنصف بر هم منطبق باشند، مسأله بی‌شمار جواب دارد. (۰/۲۵)

(صفحه ۳۹)

توجه در صورت پاسخگویی ترسیمی و بیان حالات بحث (به صورت رسم شکل) نمره کامل منظور گردد.

