

ریاضی و آمار (۲)

درستی یا نادرستی هر یک از عبارتهای زیر را مشخص کنید. (۷۵/۰ نمره)

- الف) عکس نقیض هر گزاره شرطی با خود آن گزاره شرطی، هم‌ارز است. (درست - نادرست)
- ب) هر تابعی که دامنه و بردش برابر باشد، تابع همانی است. (درست - نادرست)
- پ) نقیض گزاره «عدد ۳، عددی فرد است»، گزاره «عدد ۳، عددی زوج نیست» است. (درست - نادرست)

راهنمای تصحیح «الف) درست (۷۵/۰) (صفحه ۱۰)

«ب) نادرست (۷۵/۰) (صفحه ۳۰)

«پ) نادرست (۷۵/۰) (صفحه ۳)

درس Box

۱) عکس نقیض گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ به صورت $\sim p \Rightarrow \sim q$ است که با خودش هم‌ارز است.

۲) تابعی که به ازای هر عددی که واردش شود، همان عدد را به عنوان خروجی به ما بدهد، تابع همانی نام دارد و ضابطه‌اش به صورت $f(x) = x$ است.

۳) برای به دست آوردن نقیض یک گزاره غیرمرکب، کافایت فعل آن را منفی کنیم.

الف) با توجه به مورد ۱ درس‌باکس، درست است. ✓ پاسخ خیلی تشریحی

ب) در تابع همانی، دامنه و برد برابرند ولی هر تابعی که دامنه و بردش برابر باشد، لزوماً همانی نیست. مثلاً تابع $\{(1,4), (4,1)\}$ ، دامنه و برد یکسانی دارد ولی همانی نیست؛ پس نادرست است.

پ) عدد ۳، عددی فرد است ← نقیض ← عدد ۳، عددی فرد نیست. پس نادرست است.

۲

جاهای خالی را با توجه به کلمات داده شده، کامل کنید. (۰/۷۵ نمره)

- الف) ارزش گزاره $p \Leftrightarrow \sim p$ ، همواره است. (درست، نادرست)
 ب) نمودار تابع همانی با دامنه $\mathbb{R}$ ، روی نیمساز ناحیه قرار دارد. (اول و سوم، دوم و چهارم)
 پ) اگر f تابعی ثابت باشد، حاصل $f(۶) - f(۴)$ برابر با است. (۲، صفر)

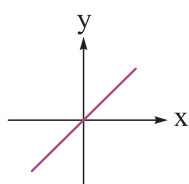
راهنمای تصحیح >> الف) نادرست (۰/۲۵) (صفحه ۱)

ب) اول و سوم (۰/۲۵) (صفحه ۳۰)

پ) صفر (۰/۲۵) (صفحه ۲۶)

پاسخ خیلی تشریحی ✓

- الف) ارزش گزاره‌های p و $\sim p$ همواره متفاوت است، پس ترکیب دشرطی آن‌ها همواره نادرست است.
 ب) نمودار تابع همانی با ضابطه $f(x) = x$ روی نیمساز ناحیه اول و سوم است:



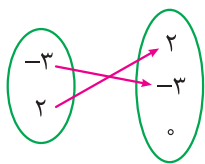
$$f(۶) - f(۴) = c - c = ۰$$

پ) $f(x)$ تابعی ثابت است، پس $f(x) = c$. در نتیجه:

۳

به سؤالات زیر پاسخ کوتاه دهید. (۷۵/۰ نمره)

- الف) اگر هر ضلع یک مستطیل را ۵ برابر کنیم، مساحت آن چند برابر می‌شود؟
ب) نمودار ون مقابل، نشان‌دهنده چه تابعی است؟



پ) اگر $f(x) = \begin{cases} -1 & x \geq 0 \\ 2 & x < 0 \end{cases}$ ، آن وقت مقدار $f(f(5))$ چقدر است؟

راهنمای تصحیح >> الف) ۲۵ (۷۲/۵) (صفحه ۱۸)

ب) همانی (۷۲/۵) (صفحه ۳۰)

پ) ۲ (۷۲/۵) (صفحه ۲۷)

پاسخ خیلی تشریحی ✓

الف) اضلاع اولیه را x و y می‌گیریم. در این حالت مساحت برابر است با: $S_1 = x \times y = xy$
اضلاع مستطیل جدید $5x$ و $5y$ هستند. در این حالت مساحت برابر است با:

$$S_2 = 5x \times 5y = 25xy$$

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{25xy}{xy} = 25$$

پس:

ب) چون اعداد ابتدا و انتهای هر پیکان با هم برابرند، پس تابع همانی است.

پ)

$$f(f(5)) = f(-1) = 2$$

از ضابطه
پایین
می‌شه ۲
از ضابطه
بالا
می‌شه -۱

۴

اگر p گزاره‌ای درست، q گزاره‌ای نادرست و r گزاره‌ای دلخواه باشد، ارزش گزاره‌های زیر را مشخص کنید. (۱ نمره)

الف) $(p \vee r) \Leftrightarrow q$

ب) $(q \Rightarrow r) \Rightarrow p$

راهنمای تصحیح >> (صفحه ۳ تا ۱)

الف) $(T \vee r) \Leftrightarrow F \equiv T \Leftrightarrow F \equiv F$ (۰/۵)

ب) $(F \Rightarrow r) \Rightarrow T \equiv T \Rightarrow T \equiv T$ (۰/۵)

درس Box

جدول ارزش گذاری چهار گزاره مرکب اصلی:

		فصلی	عطفی	شرطی	دوشرطی
p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
T	T	T	T	T	T
T	F	T	F	F	F
F	T	T	F	T	F
F	F	F	F	T	T

همارزی‌های روبه‌رو را باید بلد باشیم:

۱) $T \vee p \equiv T$

۲) $T \wedge p \equiv p$

۳) $F \vee p \equiv p$

۴) $F \wedge p \equiv F$

نکته

پاسخ خیلی تشریحی ✓

الف) $(p \vee r) \Leftrightarrow q \equiv \overbrace{(T \vee r)}^{\text{نکته ۱}} \Leftrightarrow F \equiv T \Leftrightarrow F \equiv F$

ب) $(q \Rightarrow r) \Rightarrow p \equiv \underbrace{(F \Rightarrow r)}_{\substack{\text{به انتقای} \\ \text{مقدم،} \\ \text{درسته}}} \Rightarrow T \equiv T \Rightarrow T \equiv T$

برای گزاره $(q \Rightarrow p) \Leftrightarrow (p \wedge q)$ ، جدول ارزش گذاری رسم کنید. (۲/۵ نمره)

۵

راهنمای تصحیح << (صفحه ۳ تا ۱)

p	q	$q \Rightarrow p$	$p \wedge q$	$(q \Rightarrow p) \Leftrightarrow (p \wedge q)$
د	د	د	د	د
د	ن	د	ن	ن
ن	د	ن	ن	د
ن	ن	د	ن	ن

(۰/۵)

(۰/۵)

(۰/۵)

(۰/۵)

(۰/۵)

پاسخ خیلی تشریحی ✓ ترتیب ستون ها به شکل مقابل است:

$$\underbrace{\underbrace{(q \Rightarrow p)}_{(۳)} \Leftrightarrow \underbrace{(p \wedge q)}_{(۴)}}_{(۵)}$$

جدول را می کشیم:

p	q	$q \Rightarrow p$	$p \wedge q$	$(q \Rightarrow p) \Leftrightarrow (p \wedge q)$
د	د	د	د	د
د	ن	د	ن	ن
ن	د	ن	ن	د
ن	ن	د	ن	ن

۶ استدلال زیر در کدام مرحله نادرست است؟ دلیل نادرستی آن را بنویسید. (۱ نمره)

۱) $\frac{3x+4}{3x+2} = 2x$

۲) $\frac{4}{2} = 2x$

۳) $4x = 4$

۴) $x = 1$

راهنمای تصحیح « گام دوم نادرست است. (۰/۵) در گام دوم اجازه ساده کردن $3x$ وجود ندارد (۰/۲۵) چون بین دو جمله در صورت و مخرج کسر علامت جمع وجود دارد و این ساده کردن امکان پذیر نیست. (۰/۲۵) (صفحه ۱۷)

در کسره‌های به شکل $\frac{A+B}{C+D}$ ، حق نداریم یکی از عبارت‌های صورت را با یکی از عبارت‌های مخرج ساده کنیم

درس Box

(چون بینشان جمع آمده). ولی در کسره‌های به شکل $\frac{A \times B}{C \times D}$ ، حق این کار را داریم:

$$\frac{\overset{1}{\cancel{3x}} + 4}{\cancel{3x} + 2} = \frac{4}{2}$$

نادرست!

$$\frac{\overset{1}{\cancel{(3x)}} \overset{4}{\cancel{(2y)}}}{\cancel{(6x)}} \overset{2}{\cancel{(5y)}} = \frac{4}{2} = 2$$

درسته!

پاسخ خیلی تشریحی ✓ در مرحله دوم، عبارت $3x$ در صورت و مخرج را ساده کرده که اشتباه است.

با استدلال قیاس استثنایی، جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. (۷۵/۰ نمره)

۷

مقدمه ۱: اگر تیمی قهرمان لیگ یک شود، آن گاه به لیگ برتر صعود می کند.

مقدمه ۲: تیم پاس قهرمان لیگ یک شد.

نتیجه:

راهنمای تصحیح >> پاس به لیگ برتر صعود کرد. (۷۵/۰) (صفحه ۱۴)

درس Box

استدلال قیاس استثنایی و مغالطه:

استدلال	فرم نوشتاری ۱	فرم نوشتاری ۲	به زبان ریاضی
قیاس استثنایی	مقدمه ۱: اگر p آن گاه q مقدمه ۲: p نتیجه: q	$p \Rightarrow q$ $\frac{p}{\therefore q}$	$[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$
مغالطه	مقدمه ۱: اگر p آن گاه q مقدمه ۲: q نتیجه: p	$p \Rightarrow q$ $\frac{q}{\therefore p}$	$[(p \Rightarrow q) \wedge q] \Rightarrow p$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ از مقدمه ۱، گزاره p و q را استخراج می کنیم:

اگر تیمی قهرمان لیگ یک شود، آن گاه به لیگ برتر صعود می کند.

q

p

در «نتیجه» باید گزاره q بیاید: پاس به لیگ برتر صعود کرد.

با استدلال قیاس استثنایی جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. (۷۵/۰ نمره)

مقدمه ۱: اگر شخصی در آزمون سطح یک زبان نمره بالاتر از ۶۰ بگیرد، آن گاه در کلاس سطح ۲ زبان می تواند ثبت نام کند.

مقدمه ۲: علی در آزمون سطح یک زبان نمره بالای ۶۰ گرفته است.

نتیجه:

پاسخ علی می تواند در کلاس سطح ۲ زبان ثبت نام کند. (۷۵/۰) (صفحه ۱۴)

نهایی

اگر مجموعه $\{-1, 2, 3\}$ دامنه تابع $f(x) = x^2 + 2x$ باشد، برد آن را به دست آورید. (۰/۷۵ نمره)

راهنمای تصحیح (صفحه ۲۴)

$$f(-1) = -1 \quad (۰/۲۵)$$

$$f(2) = 8 \quad (۰/۲۵) \quad \text{یا} \quad \{-1, 8, 15\} \quad (۰/۷۵)$$

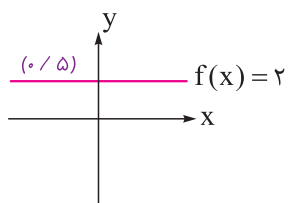
$$f(3) = 15 \quad (۰/۲۵)$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ مقدار تابع $f(x) = x^2 + 2x$ را به ازای هر سه عضو دامنه حساب می‌کنیم:

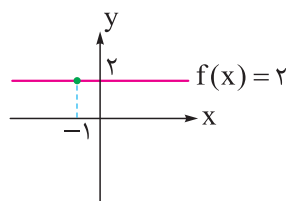
$$\left. \begin{array}{l} f(-1) = (-1)^2 + 2(-1) = 1 - 2 = -1 \\ f(2) = 2^2 + 2(2) = 4 + 4 = 8 \\ f(3) = 3^2 + 2(3) = 9 + 6 = 15 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{برد}} R_f = \{-1, 8, 15\}$$

۹ نمودار تابع ثابتی را رسم کنید که از نقطه $(-1, 2)$ عبور کند. (۵/۰ نمره)

راهنمای تصحیح « (صفحه ۲۶)



پاسخ خیلی تشریحی ✓ تابع ثابتی که از نقطه $(-1, 2)$ عبور کند، خط افقی با ضابطه $f(x) = 2$ است که نمودارش به شکل زیر است:



الف) تابع همانی بنویسید که برد آن، مجموعه $\{-1, 2, 4\}$ باشد. (۱/۵ نمره)

ب) تابع ثابتی بنویسید که دامنه‌اش، مجموعه $\{1, 4, 6\}$ باشد.

راهنمای تصحیح « الف) $\{(-1, -1), (2, 2), (4, 4)\}$ (صفحه ۳۰)

ب) $\{(1, 2), (4, 2), (6, 2)\}$ (صفحه ۲۶)

تذکر: در قسمت (ب)، جای عدد ۲ به هر عدد دیگری که نوشته شود، نمره تعلق می‌گیرد.

پاسخ خیلی تشریحی ✓ الف) باید مؤلفه اول و دوم در هر زوج مرتب برابر باشد: $f = \{(-1, -1), (2, 2), (4, 4)\}$

ب) مؤلفه اول زوج‌های مرتب، اعداد ۱، ۴ و ۶ و مؤلفه دومشان عددی یکسان است:

$g = \{(1, 2), (4, 2), (6, 2)\}$ یا $g = \{(1, -3), (4, -3), (6, -3)\}$...

اگر $f = \{(a+2, 4-a), (b+3, a), (c-1, 6)\}$ تابعی همانی باشد، مقادیر a ، b و c را به دست آورید. (۷/۵ نمره)

۱۱

راهنمای تصحیح (صفحه ۳۰)

$$a+2=4-a \Rightarrow a=1 \quad (۰/۵)$$

$$b+3=a \Rightarrow b+3=1 \Rightarrow b=-2 \quad (۰/۵)$$

$$c-1=6 \Rightarrow c=7 \quad (۰/۵)$$

در نمایش زوج مرتبی تابع همانی، مؤلفه اول و دوم هر زوج مرتب با هم برابرند. مثلاً $\{(3, 3), (-5, -5), (\frac{4}{3}, \frac{4}{3})\}$ همانی است.

درس Box

پاسخ خیلی تشریحی ✓ در هر زوج مرتب، مؤلفه اول و دوم را برابر قرار می‌دهیم:

$$\bullet (a+2, 4-a) \xrightarrow{\text{پس}} a+2=4-a \Rightarrow 2a=2 \Rightarrow a=1$$

$$\bullet (b+3, a) \xrightarrow{\text{پس}} b+3=a \Rightarrow b+3=1 \Rightarrow b=-2$$

$$\bullet (c-1, 6) \xrightarrow{\text{پس}} c-1=6 \Rightarrow c=7$$

۱۲ اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x > 1 \\ 2x + 3 & x \leq 1 \end{cases}$ باشد، حاصل $f(-\frac{1}{2})$ و $f(\sqrt{3})$ را به دست آورید. (۱ نمره)

راهنمای تصحیح << (صفحه ۲۷ و ۲۸)

$$f(\sqrt{3}) = 3 - 1 = 2 \quad (۰/۵)$$

$$f(-\frac{1}{2}) = -1 + 3 = 2 \quad (۰/۵)$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ • عدد $\sqrt{3}$ در محدوده $x > 1$ قرار دارد، پس از ضابطه بالایی خروجی می‌گیرد:

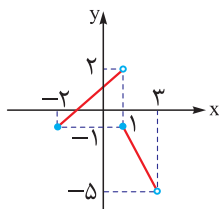
$$x > 1: f(x) = x^2 - 1 \xrightarrow{x=\sqrt{3}} f(\sqrt{3}) = (\sqrt{3})^2 - 1 = 3 - 1 = 2$$

• عدد $-\frac{1}{2}$ در محدوده $x \leq 1$ قرار دارد، پس از ضابطه پایینی خروجی می‌گیرد:

$$x \leq 1: f(x) = 2x + 3 \xrightarrow{x=-\frac{1}{2}} f(-\frac{1}{2}) = 2(-\frac{1}{2}) + 3 = -1 + 3 = 2$$

۱۳ نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x+1 & -2 \leq x < 1 \\ 1-2x & 1 \leq x < 3 \end{cases}$ را رسم کنید. (۱/۵ نمره)

راهنمای تصحیح (صفحه ۲۹)

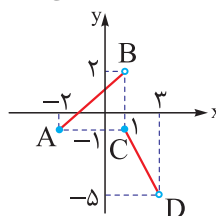


رسم هر خط (۰/۷۵) (توخالی و توپر گذاشتن نقاط مهم است)

پاسخ خیلی تشریحی ✓ هر دو ضابطه، خطی هستند، پس با نقاط ابتدا و انتهای دامنه ضابطه‌هایشان رسمشان می‌کنیم:

x	-2	1
ضابطه بالا: $y = x + 1$	-1	2
نقطه	$(-2, -1)$	$(1, 2)$
	$\underbrace{\hspace{1cm}}_A$	$\underbrace{\hspace{1cm}}_B$
	(توپر)	(توخالی)

x	1	3
ضابطه پایین: $y = -2x + 1$	-1	-5
نقطه	$(1, -1)$	$(3, -5)$
	$\underbrace{\hspace{1cm}}_C$	$\underbrace{\hspace{1cm}}_D$
	(توپر)	(توخالی)

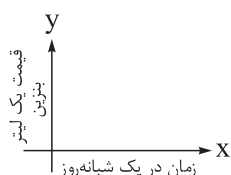


۱۴

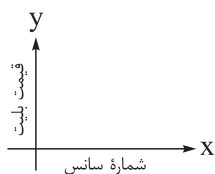
با توجه به معرفی محور x و y در دستگاه مختصات، با هر کدام از توضیحات زیر، کدام یک از توابع ثابت،

چندضابطه‌ای یا همانی معرفی می‌شوند؟ نمودار هر مورد را با توجه به توضیحات کامل کنید. (۱/۷۵ نمره)

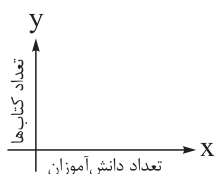
الف) هزینه یک لیتر بنزین عادی در هر زمان شبانه‌روز ۱۵۰۰ تومان است:



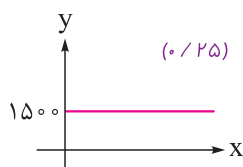
ب) بلیت سینما در دو سانس ابتدایی ۸۰ هزار تومان و در سه سانس بعدی ۱۴۰ هزار تومان است.



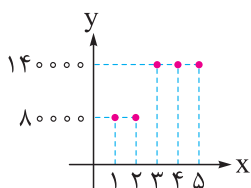
پ) به مناسبت روز کتابخوانی، مدرسه به هر دانش‌آموز یک کتاب هدیه می‌دهد.



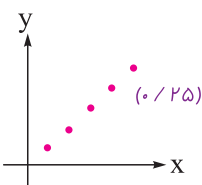
راهنمای تصحیح (صفحه ۳۱)



الف) ثابت (۰/۲۵)

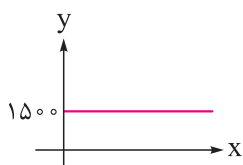


ب) چندضابطه‌ای (۰/۲۵)



پ) همانی (۰/۲۵)

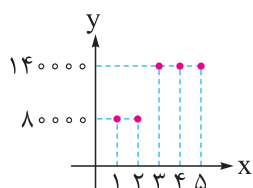
پاسخ خیلی تشریحی ✓ الف) چون قیمت بنزین ثابت است، پس با تابع ثابت $f(x) = 1500$ با نمودار مقابل روبه‌رو هستیم:



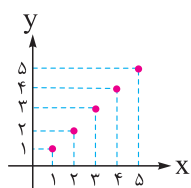
ب) با یک تابع چندضابطه‌ای (دوضابطه‌ای) روبه‌رو هستیم:

$$g(x) = \begin{cases} 80000 & x = 1, 2 \\ 140000 & x = 3, 4, 5 \end{cases}$$

نمودارش هم به صورت مقابل است:



پ) به ازای هر دانش‌آموز، یک کتاب هدیه می‌دهند، پس با تابع **همانی** با دامنه اعداد طبیعی کوچک‌تر یا مساوی تعداد دانش‌آموزان مدرسه روبه‌رو هستیم که نمودارش هم به صورت مقابل است:



۱۵ تابع $f(x) = (a+2)x^2 + (b-1)x + c$ تابعی همانی است. مقادیر a ، b و c را به دست آورید. (۱/۲۵ نمره)

راهنمای تصحیح

$$a+2=0 \Rightarrow a=-2 \quad (۰/۵)$$

$$b-1=1 \Rightarrow b=2 \quad (۰/۵)$$

$$c=0 \quad (۰/۲۵)$$

(صفحه ۳۰)

ضابطه تابع همانی به صورت $f(x) = x$ است، یعنی نه x^2 و نه x^3 داریم و نه عدد ثابت! ضمناً ضریب x هم یک است. مثلاً اگر $y = ax^2 + bx + c$ تابع همانی باشد، باید $a=0$ ، $b=1$ و $c=0$ باشد.

درجی Box

$$a+2=0 \Rightarrow a=-2$$

$$b-1=1 \Rightarrow b=2$$

$$c=0$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ • باید ضریب x^2 صفر باشد:

• باید ضریب x یک باشد:

• باید عدد ثابت صفر باشد:

۱۶ اگر نقطه $A(m+3, m^2+1)$ روی نیمساز ناحیه اول و سوم باشد، مقدار m را به دست آورید. (۱/۲۵ نمره)

راهنمای تصحیح >> (صفحه ۳۲)

$$\underbrace{m^2+1=m+3}_{(۰/۲۵)} \Rightarrow \underbrace{m^2-m-2=0}_{\text{فرایند حل (۰/۵)}} \Rightarrow \underbrace{(m-2)(m+1)=0}_{(۰/۵)} \Rightarrow m=2, -1$$

۱) معادله نیمساز ناحیه اول و سوم $y=x$ است و هر نقطه‌ای که روی آن باشد، طول و عرضش برابر است. مثلاً نقاط $(2,2)$ ، $(-1,-1)$ و $(\sqrt{5}, \sqrt{5})$ روی این نیمساز قرار دارند.
۲) معادله نیمساز ناحیه دوم و چهارم $y=-x$ است و هر نقطه‌ای که روی آن باشد، طول و عرضش قرینه هم هستند. مثلاً نقاط $(2,-2)$ ، $(-1,1)$ و $(\sqrt{5}, -\sqrt{5})$ روی این نیمساز قرار دارند.

پاسخ خیلی تشریحی ✓ باید طول و عرض نقطه $A(\underbrace{m+3}_{\text{طول}}, \underbrace{m^2+1}_{\text{عرض}})$ برابر باشند:

$$m^2+1=m+3 \Rightarrow m^2-m-2=0 \xrightarrow{\text{جمله مشترک}} (m-2)(m+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} m=2 \\ m=-1 \end{cases}$$

۱۷ اگر f تابعی ثابت، g تابعی همانی و $\frac{g(9)}{f(5)} = f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = 9$ باشد، مقدار $|f(0)|$ را به دست

آورید. (۱/۵ نمره)

راهنمای تصحیح >> (صفحه ۲۶ و ۳۰)

$$\underbrace{c+c+c+c}_{(۰/۵)} = \frac{9}{c} \Rightarrow \underbrace{4c = \frac{9}{c}}_{(۰/۵)} \Rightarrow 4c^2 = 9 \Rightarrow c^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow \underbrace{|c| = \frac{3}{2}}_{(۰/۲۵)}$$

$$|f(0)| = |c| = \frac{3}{2} \quad (۰/۲۵)$$

$$f(1) = f(2) = f(3) = f(4) = f(5) = c$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ f تابعی ثابت است، پس جای تمام $f(0)$ ها می نویسیم c :

$$g(9) = 9$$

g تابعی همانی است، پس:

جای گذاری می کنیم:

$$\underbrace{f(1)}_c + \underbrace{f(2)}_c + \underbrace{f(3)}_c + \underbrace{f(4)}_c = \frac{g(9)}{\underbrace{f(5)}_c} \Rightarrow 4c = \frac{9}{c} \xrightarrow[\text{وسطین}]{\text{طرفین}} 4c^2 = 9 \Rightarrow c^2 = \frac{9}{4}$$

$$\xrightarrow{\text{جذر}} |c| = \frac{3}{2}$$

$$\underbrace{|f(0)|}_c = |c| = \frac{3}{2}$$

$f(0)$ همان c است، پس: