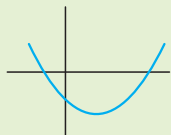


حسابان (۱)

درستی یا نادرستی هر یک از عبارات زیر را مشخص کنید. (۱ نمره)

الف) مجموع ریشه‌های معادله $2x^2 + 5x - 6 = 0$ برابر $-\frac{5}{2}$ است.

ب) در سهمی مقابل علامت $ab + c$ حتماً منفی است.



ج) اگر $f(x) = x^2$ و $g(x) = \sqrt{x}$ ، آن‌گاه تابع $\text{fog}(x)$ با $h(x) = x$ برابر است.

د) تابع $y = 3x^2 + bx + 1$ در بازه $[4, +\infty)$ وارون پذیر می‌باشد، در این صورت $b = -25$ می‌تواند درست باشد.

الف) درست (۰/۲۵) (صفحه ۸)

ب) درست (۰/۲۵) (صفحه ۱۲)

ج) نادرست (۰/۲۵) (صفحه ۴۱)

د) نادرست (۰/۲۵) (صفحه ۵۵)

راهنمای تصحیح

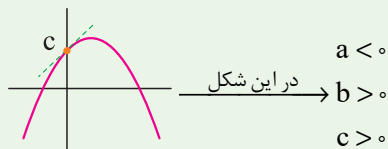
درس‌Box

در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) اگر $\Delta > 0$ باشد که معادله دو ریشه α و β دارد، مجموع و حاصل ضرب دو ریشه به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a}$$

$$P = \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a}$$

* در سهمی $f(x) = ax^2 + bx + c$ ، اگر $a > 0$ باشد سهمی به صورت $\cup$ و اگر $a < 0$ باشد به صورت $\cap$ می‌باشد. c ، مقدار عرض از مبدأ سهمی و علامت b با توجه به شیب مماس در نقطه عرض از مبدأ مشخص می‌شود به طوری که اگر شیب خط مماس در عرض از مبدأ مثبت باشد، $b > 0$ و اگر منفی باشد $b < 0$ است. به مثال زیر توجه کنید.



* دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ در صورتی برابر هستند که:

۱- دامنه هر دو تابع دقیقاً برابر باشد.

۲- ضابطه دو تابع با هم یکسان بشوند.

* تابع سهمی در حالت کلی غیر یک‌به‌یک است، مگر دامنه آن به بعد یا قبل از، $x_S = -\frac{b}{2a}$ محدود شود. به عبارت دیگر سهمی در بازه‌ای یک‌به‌یک است که x_S در داخل آن نباشد، و نهایتاً ابتدا یا انتهای بازه باشد.

$$S = -\frac{b}{a} = -\frac{5}{2}$$

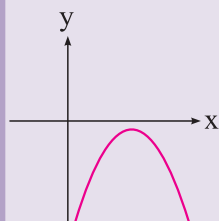
پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$a > 0, b < 0, c < 0 \Rightarrow ab < 0 \Rightarrow ab + c < 0$$

$$D_{\text{fog}} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in x \geq 0 \mid \sqrt{x} \in \mathbb{R}\} = x \geq 0 \Rightarrow D_h \neq D_{\text{fog}}$$

$$\frac{-b}{6} \leq 4 \Rightarrow -b \leq 24 \Rightarrow b \geq -24$$

شکل روبه‌رو نمودار سهمی $y = ax^2 + bx + c$ می‌باشد، علامت ضرایب b و c را تعیین کنید. (۵/۰ نمره)



پاسخ: $c < 0$ (منفی) (۵/۰) و $b > 0$ (مثبت) (۵/۰) (صفحه ۱۲)

۲ جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. (۱ نمره)

الف) در یک مستطیل نسبت طولی برقرار است، اگر عرض این مستطیل ۱ باشد، طول آن است.

ب) معادله $x^2 + (y-1)^2 = 0$ ، یک تابع را مشخص (می‌کند - نمی‌کند)

ج) هم‌دامنه تابع را می‌توان هر مجموعه‌ای شامل در نظر گرفت.

د) اگر f و g دو تابع باشند، $f+g$ تابعی است که بزرگترین دامنه آن است.

راهنمای تصحیح « الف) $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ (۰/۲۵) (کار در کلاس صفحه ۱۹)

ب) می‌کند (۰/۲۵) (صفحه ۴۸)

ج) بُرد (۰/۲۵) (صفحه ۳۹)

د) $D_f \cap D_g$ (۰/۲۵) (صفحه ۶۴)

درسی Box

* در مستطیلی نسبت طولی برقرار است که رابطه $\frac{\text{طول} + \text{عرض}}{\text{طول}} = \frac{\text{طول}}{\text{عرض}}$ برقرار باشد.

* رابطه‌ای تابع است که به ازای یک ورودی فقط و فقط یک خروجی داشته باشد.

* هم‌دامنه مجموعه‌ای است که بُرد تابع زیرمجموعه آن باشد.

* برای اعمال جبری توابع، دامنه به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$D_{f+g} = D_f \cap D_g$$

$$D_{f-g} = D_f \cap D_g$$

$$D_{f \times g} = D_f \cap D_g$$

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\}$$

الف) $\frac{x}{1} = \frac{x+1}{x} \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \xrightarrow{x>0} x = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$

ب) جمع دو عبارت همواره نامنفی زمانی صفر می‌شود که هر دو صفر باشند.

$$x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$(y-1)^2 = 0 \Rightarrow y-1 = 0 \Rightarrow y = 1$$

به ازای یک ورودی x یک خروجی y داریم پس تابع است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

ب) در معادله $|y| = x + 1$ ، y تابعی از x نیست. (۰/۲۵ نمره) (صفحه ۴۹)

پاسخ: درست.

نهایی

در دنباله ... ۳, ۶, ۹, ۱۲, ۱۵ مجموع ۱۰ جمله اول، چند برابر مجموع ۴ جمله اول دنباله هندسی ... ۳, ۹, ۲۷, ... است؟ (۱ نمره)

۳

راهنمای تصحیح

$$S_{10} = \frac{1}{r} [r(3) + 9 \times 3] = 5[6 + 27] = 165 \quad (0/25)$$

$$S'_4 = 3 \times \frac{3^4 - 1}{3 - 1} = 3 \times \frac{81 - 1}{2} = 3 \times 40 = 120 \quad (0/25)$$

$$\frac{S_{10}}{S'_4} = \frac{165}{120} = \frac{11}{8} \quad (0/5) \quad (\text{صفحه ۲ و ۴})$$

درپس Box

* مجموع n جمله اول دنباله حسابی با جمله عمومی $a_n = a_1 + (n-1)d$ ، به صورت زیر محاسبه می شود:

$$S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d] = \frac{n}{2} (a_1 + a_n)$$

* مجموع n جمله اول دنباله هندسی با جمله عمومی $a_n = a_1 q^{n-1}$ ، به صورت زیر محاسبه می شود:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

چون دنباله حسابی است:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$S_n = \frac{n}{2} (2a_1 + (n-1)d) \Rightarrow S_{10} = \frac{1}{2} (2(3) + 9(3)) = 5(33) = 165$$

$$S'_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q} \Rightarrow S'_4 = \frac{3(1 - 3^4)}{1 - 3} = \frac{3(-80)}{-2} = 120$$

$$\frac{S_{10}}{S'_4} = \frac{165}{120} = \frac{11}{8}$$

معادله درجه دومی بنویسید که ریشه هایش دو برابر ریشه های معادله $2x^2 + 4x - 1 = 0$ باشد. (۷۵٪ نمره)

$$\left. \begin{aligned} S &= \alpha + \beta = -2 \\ P &= \alpha\beta = -\frac{1}{2} \end{aligned} \right\} (0/75)$$

$$\left. \begin{aligned} S' &= 2\alpha + 2\beta = -4 \\ P' &= (2\alpha)(2\beta) = -2 \end{aligned} \right\} (0/75) \quad x^2 + 4x - 2 = 0 (0/75)$$

(صفحه ۹)

راهنمای تصحیح

درجی Box

نوشتن معادله درجه ۲ که مجموع (S) و حاصل ضرب (P) ریشه هایش را داریم، به صورت زیر است:

$$x^2 - Sx + P = 0$$

و البته می توان معادله بالا را در هر عدد حقیقی دلخواهی ضرب کرد.

اگر α و β ریشه های معادله $2x^2 + 4x - 1 = 0$ باشند، داریم:

$$\left\{ \begin{aligned} S &= \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{-4}{2} = -2 \\ P &= \alpha\beta = \frac{c}{a} = -\frac{1}{2} \end{aligned} \right.$$

اگر معادله درجه دومی ریشه هایش دو برابر ریشه های معادله $2x^2 + 4x - 1 = 0$ باشد، داریم:

$$\alpha' = 2\alpha, \beta' = 2\beta$$

$$S' = \alpha' + \beta' = 2\alpha + 2\beta = 2(\alpha + \beta) = 2(-2) = -4$$

$$P' = \alpha'\beta' = (2\alpha)(2\beta) = 4\alpha\beta = 4\left(-\frac{1}{2}\right) = -2$$

$$x^2 - S'x + P' = 0 \Rightarrow x^2 - (-4)x + (-2) = 0 \Rightarrow x^2 + 4x - 2 = 0$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

اگر $A(2, -1)$ و خط $4y = 3x + 5$ عمودمنصف پاره خط AB باشد، مساحت دایره‌ای به شعاع AB را بیابید. (۱ نمره)

راهنمای تصحیح

$$d = \frac{|3(2) - 4(-1) + 5|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{15}{5} = 3 \quad (۰/۵)$$

$$AB = 2d = 6 \quad (۰/۲۵)$$

$$S = \pi R^2 = 36\pi \quad (۰/۲۵)$$

(صفحه ۳۱)

درس Box

* مفهوم «عمودمنصف» داخل خودش گنجانده شده است، ☺ هم بر پاره خط عمود است و هم پاره خط را نصف می کند.

* فاصله نقطه $A(x_A, y_A)$ از خط $ax + by + c = 0$ به صورت زیر محاسبه می شود:

$$d = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

اگر یک شکل شماتیک برای سؤال رسم کنیم به صورت زیر است:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$3x - 4y + 5 = 0$$

$$A(2, -1) \quad B$$

با توجه به این که خط $3x - 4y + 5 = 0$ عمودمنصف AB است، فاصله نقطه A از خط با فاصله نقطه B از خط برابر است پس داریم:

$$d = \frac{|3(2) - 4(-1) + 5|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{15}{5} = 3 \Rightarrow AB = 2d = 6$$

$$S_{\text{دایره}} = \pi R^2 = \pi(6)^2 = 36\pi$$

در مثلث ABC به رأس‌های $A(2, 5)$ ، $B(-1, 3)$ و $C(1, -5)$ میانه AM محور طول‌ها را در چه طولی قطع

می‌کند؟ (۱ نمره)

۶

راهنمای تصحیح

$$M \begin{vmatrix} 0 \\ -1 \end{vmatrix} \quad (0/25)$$

$$AM: y = 3x - 1 \quad (0/5)$$

$$y = 0 \Rightarrow 3x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3} \quad (0/25)$$

(صفحه ۳۲)

درسی Box

* در مثلث ABC، میانه AM یعنی از رأس A به وسط ضلع BC رسم کنیم.

* اگر $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ باشد، نقطه میانی پاره خط AB به صورت $M(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2})$

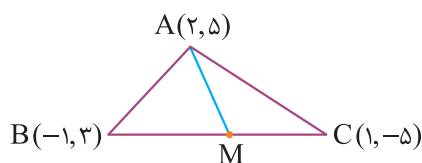
و شیب خط گذرنده از A و B به صورت $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ است.

* معادله یک خط به شیب «a» که از نقطه $A(x_A, y_A)$ می‌گذرد، به صورت زیر می‌باشد:

$$y - y_A = a(x - x_A)$$

شکل شماتیک مثلث ABC به صورت زیر است:

پاسخ خیلی تشریحی ✓



چون M وسط BC است، پس مختصات طول و عرض آن میانگین مختصات طول و عرض B و C است:

$$M(x_M, y_M) = (\frac{x_B + x_C}{2}, \frac{y_B + y_C}{2}) = (\frac{-1 + 1}{2}, \frac{3 - 5}{2}) = (0, -1)$$

حالا می‌توان به کمک مختصات دو نقطه $A(2, 5)$ و $M(0, -1)$ معادله خط AM را به دست آورد:

$$\begin{cases} A(2, 5) \\ M(0, -1) \end{cases} \Rightarrow a = \frac{5 - (-1)}{2 - 0} = 3 \quad y = 3x + b \Rightarrow b = -1 \Rightarrow y = 3x - 1$$

برای پیدا کردن محل تلاقی با محور طول‌ها کافیست معادله $y = 0$ را حل کنیم.

$$y = 3x - 1 \Rightarrow 3x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$$

۷ معادلات زیر را حل کنید. (۷۷۵ نمره)

الف) $|x+1| = |3-2x|$

ب) $\sqrt{1-x} = 2x+1$

ج) $3x + [2x+1] = 5x + [2x+9]$

الف)
$$\begin{cases} x+1=3-2x \Rightarrow 3x=2 \Rightarrow x=\frac{2}{3} \text{ (۰/۲۵)} \\ x+1=-3+2x \Rightarrow x=4 \text{ (۰/۲۵)} \end{cases}$$

راهنمای تصحیح >> (صفحه ۲۶)

ب) $1-x = 4x^2 + 4x + 1 \text{ (۰/۲۵)}$

(صفحه ۲۱)

$\Rightarrow 4x^2 + 5x = 0$

$\Rightarrow x(4x+5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \text{ (۰/۲۵)} \\ x=-\frac{5}{4} \text{ غ ق (۰/۲۵)} \end{cases}$

ج) $3x + [2x] + 1 = 5x + [2x] + 9 \text{ (۰/۲۵)}$

(صفحه ۵۳)

$2x = -8 \Rightarrow x = -4 \text{ (۰/۲۵)}$

$|a| = |b| \Rightarrow \begin{cases} a = +b \\ a = -b \end{cases}$

* برای حل معادلات گنگ (شامل رادیکال فرجه ۲ که زیرش x است)، هر دو طرف معادله را به توان ۲ می‌رسانیم، فقط حواستون باشه، جواب آخر باید در اصل معادله اولیه چک شود تا قابل قبول باشد.
* فقط جمع و تفریق عدد صحیح اجازه خروج از جزء صحیح را دارد.

مثال $[x+2] = [x] + 2$

الف) از ویژگی $|a| = |b| \Rightarrow a = \pm b$ استفاده می‌کنیم:

$|x+1| = |3-2x| \Rightarrow x+1 = \pm(3-2x) \Rightarrow \begin{cases} x+1=3-2x \Rightarrow x=\frac{2}{3} \\ x+1=-3+2x \Rightarrow x=4 \end{cases}$

ب) طرفین را به توان دو می‌رسانیم:

$\sqrt{1-x} = 2x+1 \Rightarrow 1-x = (2x+1)^2 \Rightarrow 1-x = 4x^2 + 4x + 1$

$\Rightarrow 4x^2 + 5x = 0 \Rightarrow x(4x+5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ 4x+5=0 \Rightarrow x=-\frac{5}{4} \text{ غ ق} \end{cases}$

ج) ابتدا اعداد صحیح داخل جزء صحیح را بیرون می‌آوریم:

$3x + [2x+1] = 5x + [2x+9] \Rightarrow 3x + [2x] + 1 = 5x + [2x] + 9$

$\Rightarrow 2x = -8 \Rightarrow x = -4$

درسی Box

پاسخ خیلی تشریحی ✓

معادله $\sqrt{x+1} = x-5$ را حل کنید. (۱ نمره) (صفحه ۲۱)

پاسخ:

روشن ۱

$\sqrt{x+1} = x-5 \rightarrow x+1 = (x-5)^2 \rightarrow x+1 = x^2 - 10x + 25$

(۰/۲۵)

$\rightarrow x^2 - 11x + 24 = 0 \rightarrow (x-3)(x-8) = 0$

(۰/۲۵)

$\rightarrow x=3 \text{ (غ ق (۰/۲۵))} \quad x=8 \text{ (ق ق (۰/۲۵))}$

نهایی

روش ۲

$$\sqrt{x+1} = x-5 \xrightarrow{x-5=t} \underbrace{\sqrt{t+6}=t}_{(0/25)} \rightarrow t^2 - t - 6 = 0$$

$$\rightarrow t = -2 \text{ (غ ق)}$$

$$\rightarrow t = 3 \rightarrow \underbrace{x = t + 5 = 8}_{(0/25)}$$

(صفحه ۲۱)

نمودار $y = |x - 2| + |x + 1|$ را رسم کنید. (۷/۵ نمره)

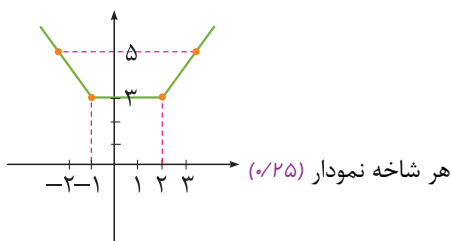


راهنمای تصحیح >>

$$x \leq -1 \Rightarrow y = -x + 2 - x - 1 = -2x + 1 \quad (۰/۲۵)$$

$$-1 \leq x \leq 2 \Rightarrow y = -x + 2 + x + 1 = 3 \quad (۰/۲۵)$$

$$x \geq 2 \Rightarrow y = x - 2 + x + 1 = 2x - 1 \quad (۰/۲۵)$$



(صفحه ۲۴)

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

درس Box

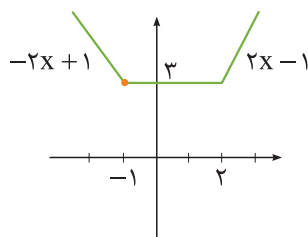
به کمک ریشه‌های داخل قدرمطلق علامت عبارات داخل قدرمطلق را مشخص می‌کنیم و قدرمطلق را حذف می‌کنیم، تابع را به صورت چندضابطه‌ای می‌نویسیم و در آخر نمودار را رسم می‌کنیم.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$\text{ریشه‌ها: } \begin{cases} x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \\ x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \end{cases}$$

$$y = |x - 2| + |x + 1| \Rightarrow \begin{cases} x - 2 + x + 1 & x \geq 2 \\ 2 - x + x + 1 & -1 \leq x \leq 2 \\ 2 - x - x - 1 & x \leq -1 \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} 2x - 1 & x \geq 2 \\ 3 & -1 \leq x \leq 2 \\ -2x + 1 & x \leq -1 \end{cases}$$



۹

میثم یک اتاق را در ۶ ساعت رنگ می‌کند، اگر حامد به کمک او بیاید، این کار در ۴ ساعت تمام می‌شود. حامد

به تنهایی اتاق را در چند ساعت رنگ می‌کند؟ (۰/۷۵ نمره)

راهنمای تصحیح

$$\frac{1}{M} + \frac{1}{H} = \frac{1}{4} \quad (۰/۲۵)$$

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{H} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{H} = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{2}{24} = \frac{1}{12} \Rightarrow H = 12 \quad (۰/۵)$$

(صفحه ۲۲)

پاسخ خیلی تشریحی ✓

فرض می‌کنیم میثم در M ساعت کل کار را انجام می‌دهد و حامد در H ساعت کل کار را انجام می‌دهد.

حالا اگر ۱ ساعت گذشته باشد یعنی میثم $\frac{1}{M}$ کل کار و حامد $\frac{1}{H}$ کل کار را انجام داده‌اند.

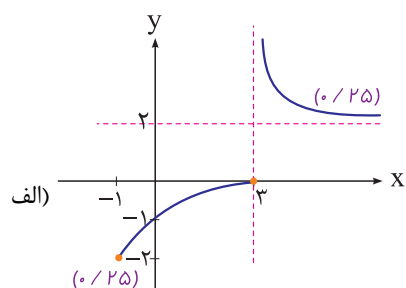
چون میثم و حامد کل کار را در ۴ ساعت انجام می‌دهند پس در یک ساعت $\frac{1}{4}$ کل کار را انجام داده‌اند.

$$\frac{1}{M} + \frac{1}{H} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{6} + \frac{1}{H} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{H} = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{1}{H} = \frac{6-4}{24} = \frac{2}{24} = \frac{1}{12} \Rightarrow H = 12$$

نمودار توابع زیر را رسم کنید و سپس دامنه و برد هر یک را مشخص کنید. (۲ نمره)

الف)
$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x+1}{x-3} & x > 3 \\ \sqrt{x+1}-2 & -1 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

ب) $g(x) = [2x] \quad -1 \leq x < 1$



$D_f = [-1, +\infty)$ (۰/۲۵)

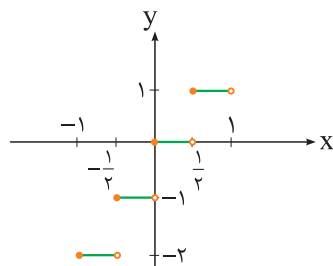
$R_f = [-2, 0] \cup (2, +\infty)$ (۰/۲۵)

ب) $-1 \leq x < -\frac{1}{2} \Rightarrow y = -2$

$-\frac{1}{2} \leq x < 0 \Rightarrow y = -1$

$0 \leq x < \frac{1}{2} \Rightarrow y = 0$

$\frac{1}{2} \leq x < 1 \Rightarrow y = 1$ (۰/۵)



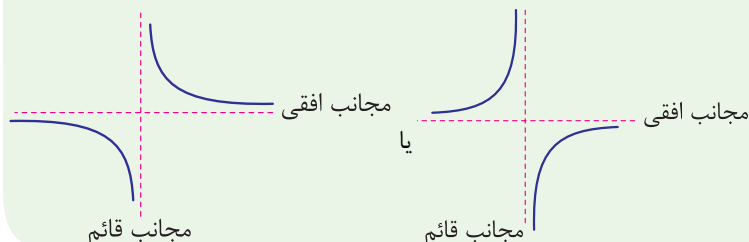
رسم نمودار (۰/۵)

* برای رسم تابع هموگرافیک $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ مراحل زیر را طی می کنیم:

(۱) ریشهٔ مخرج که همان مجانب قائم است را پیدا می کنیم. $cx + d = 0 \rightarrow x = -\frac{d}{c}$

(۲) مجانب افقی را محاسبه می کنیم. $y = \frac{a}{c}$ مجانب افقی

(۳) یک نقطهٔ دلخواه را روی نمودار پیدا می کنیم، زیرا نمودار هموگرافیک با توجه به مجانب هایش، به یکی از دو حالت زیر است که نقطهٔ دلخواه آن را مشخص می کند.

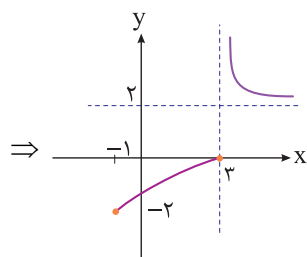
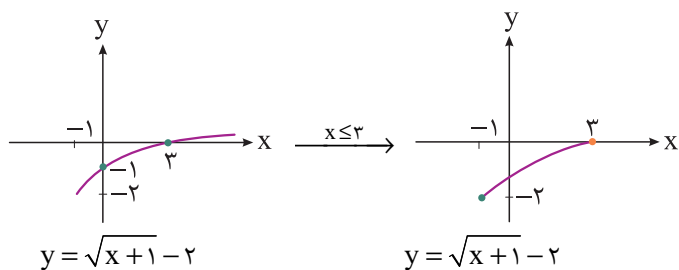
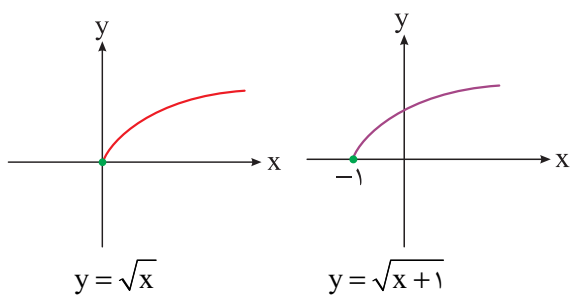
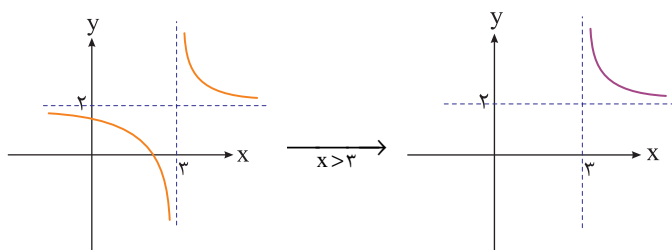


راهنمای تصحیح >> (صفحه ۴۹)

درس Box

پاسخ خیلی تشریحی ✓ (الف)

$$x = \frac{-d}{c} = 3 \text{ و } y = \frac{a}{c} = 2$$

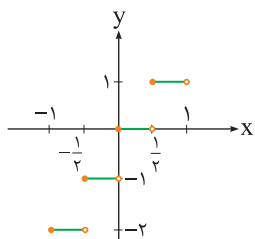


$$D_f = [-1, +\infty)$$

$$R_f = [-2, 0] \cup (2, +\infty)$$

ب) $-1 \leq x < 1 \Rightarrow -2 \leq 2x < 2$

$$g(x) = \begin{cases} -2 & -2 \leq 2x < -1 \Rightarrow [2x] = -2 \\ -1 & -1 \leq 2x < 0 \Rightarrow [2x] = -1 \\ 0 & 0 \leq 2x < 1 \Rightarrow [2x] = 0 \\ 1 & 1 \leq 2x < 2 \Rightarrow [2x] = 1 \end{cases} \Rightarrow g(x) = \begin{cases} -2 & -2 \leq 2x < -1 \Rightarrow -1 \leq x < -\frac{1}{2} \\ -1 & -1 \leq 2x < 0 \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq x < 0 \\ 0 & 0 \leq 2x < 1 \Rightarrow 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 1 & 1 \leq 2x < 2 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq x < 1 \end{cases}$$



اگر $f(x) = |x-1|$ و $g(x) = \frac{3x+1}{x-1}$ در نظر بگیریم، دامنه و ضابطه هر یک از موارد زیر را به دست آورید. (۲/۵ نمره)

الف) $\text{gof}(x)$

ب) $(f \times g)(x)$

ج) $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

یک سری بارمها «یا» دارد. $D_{\text{gof}} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-1| \neq 1\} = \mathbb{R} - \{0, 2\}$ (۰/۲۵)

$$\text{gof}(x) = \frac{3|x-1|+1}{|x-1|-1} \quad (۰/۲۵)$$

$$\text{ب) } D_{f \times g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} - \{1\} \quad (۰/۲۵)$$

$$(f \times g)(x) = |x-1| \times \frac{3x+1}{x-1} = \begin{cases} 3x+1 & x > 1 \\ -3x-1 & x < 1 \end{cases} \quad (۰/۲۵)$$

هر کدام را نوشت کافی است.

$$\text{ج) } D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\} = \mathbb{R} - \{-\frac{1}{3}, 1\} \quad (۰/۵)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{|x-1|}{\frac{3x+1}{x-1}} = \frac{(x-1)|x-1|}{3x+1} = \begin{cases} \frac{(x-1)^2}{3x+1} & x > 1 \\ -\frac{(x-1)^2}{3x+1} & x < 1, x \neq -\frac{1}{3} \end{cases} \quad (۰/۲۵)$$

هر کدام را نوشت کافی است.

(صفحه ۶۳ و ۶۷)

$$D_{\text{fog}} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

* برای محاسبه ضابطه $\text{fog}(x)$ ، ضابطه $g(x)$ را به جای x های ضابطه $f(x)$ قرار می دهیم.

* برای اعمال جبری توابع، دامنه به صورت $D_{f \circ g} = D_f \cap D_g$ و $D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\}$ قرار می دهیم.

می باشد و ضابطه آن از انجام عمل جبری خواسته شده بین ضابطه ها به دست می آید.

درسی Box

پاسخ خیلی تشریحی ✓ اول از همه بریم دامنه توابع f و g را به دست بیاریم که جلوتر به کارمون میان.

$$D_f : \mathbb{R} \text{ و } D_g : \mathbb{R} - \{1\} \text{ یا } x \neq 1$$

حالا به کمک تعریف درس Box دامنه ها را به دست می آوریم:

$$\text{الف) } D_{\text{gof}} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-1| \neq 1\} \Rightarrow |x-1| \neq 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-1 \neq 1 \Rightarrow x \neq 2 \\ x-1 \neq -1 \Rightarrow x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow D_{\text{gof}} = \mathbb{R} - \{0, 2\}$$

$$\text{gof}(x) = g(f(x)) = \frac{3(|x-1|)+1}{(|x-1|)-1} = \frac{3|x-1|+1}{|x-1|-1}$$

$$\text{ب) } D_{f \times g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} - \{1\}$$

$$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x) = |x-1| \times \frac{3x+1}{x-1}$$

$$یا: \begin{cases} x-1 \times \frac{3x+1}{x-1} & x > 1 \\ -(x-1) \times \frac{3x+1}{x-1} & x < 1 \end{cases} = \begin{cases} 3x+1 & x > 1 \\ -3x-1 & x < 1 \end{cases}$$

$$ج) D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\} = \mathbb{R} \cap (\mathbb{R} - \{1\}) - \{x \mid \frac{3x+1}{x-1} = 0\} = \mathbb{R} - \{-\frac{1}{3}, 1\}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{|x-1|}{\frac{3x+1}{x-1}} = \frac{|x-1|(x-1)}{3x+1} یا \begin{cases} \frac{(x-1)(x-1)}{3x+1} & x > 1 \\ \frac{-(x-1)(x-1)}{3x+1} & x < 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{(x-1)^2}{3x+1} & x > 1 \\ \frac{-(x-1)^2}{3x+1} & x < 1, x \neq -\frac{1}{3} \end{cases}$$

۱۲

ضابطه وارون تابع $f(x) = x^2 - 4x + 1$ را در دامنه $[2, +\infty)$ به دست آورید. (۱ نمره)

راهنمای تصحیح

$$f(x) = (x - 2)^2 - 3$$

$$y + 3 = (x - 2)^2 \quad (۰/۲۵)$$

$$x - 2 = \sqrt{y + 3} \quad (۰/۲۵)$$

$$x = \sqrt{y + 3} + 2 \quad (۰/۲۵)$$

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x + 3} + 2 \quad (۰/۲۵)$$

(صفحه ۶۱)

درس Box

* تابع f اگر وارون پذیر (یک به یک) باشد، برای یافتن ضابطه وارون، با اعمال ریاضی x را تنها می‌کنیم، سپس به جای x ، $f^{-1}(x)$ و به جای y در طرف دیگر تساوی « x » قرار می‌دهیم.

با توجه به درس Box چون سهمی $y = x^2 - 4x + 1$ در دامنه $[2, +\infty)$ و $[-\infty, 2]$ یک به یک است ($x_s = 2$ است)، در دامنه داده شده در صورت سؤال شرط یک به یک بودن برقرار است، پس می‌توانیم وارون آن را به دست بیاوریم.

$$f(x) = x^2 - 4x + 1 \Rightarrow y = x^2 - 4x + 4 - 3 \Rightarrow y = (x - 2)^2 - 3 \Rightarrow y + 3 = (x - 2)^2$$

$$\xrightarrow{\sqrt{\quad}} \sqrt{y + 3} = |x - 2| \xrightarrow{\text{چون } x \geq 2} \sqrt{y + 3} = x - 2 \Rightarrow x = 2 + \sqrt{y + 3} \Rightarrow f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{x + 3}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

۱۳

وارون تابع $f(x) = 3x + a\sqrt{x}$ ، محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض ۹ قطع می‌کند، a را بیابید. (۷۵ نمره)

راهنمای تصحیح >>

$$f(9) = 0 \quad (۰/۲۵)$$

$$27 + 3a = 0 \quad (۰/۲۵)$$

$$a = -9 \quad (۰/۲۵)$$

(صفحه ۵۷)

$$f(a) = b \Leftrightarrow f^{-1}(b) = a$$

اگر f تابعی وارون‌پذیر باشد، آن‌گاه:

$$f(9) = 0 \Leftrightarrow f^{-1}(0) = 9 \Leftrightarrow \text{وارون تابع محور عرض‌ها را در عرض ۹ قطع می‌کند.}$$

$$f(x) = 3x + a\sqrt{x} \Rightarrow f(9) = 3(9) + a\sqrt{9} = 0 \Rightarrow 27 + 3a = 0 \Rightarrow a = -9$$

دروس Box

پاسخ خیلی تشریحی ✓

۱۴

با توجه به توابع f و g داده شده، $\text{fog}(x)$ و $\text{gof}(x)$ و $\frac{f}{g}(x)$ را با نوشتن اعضا نمایش دهید. (۵/۱ نمره)

$$f(x) = \{(1, 5), (2, 3), (-4, 0), (5, 1)\}$$

$$g(x) = \{(-2, 1), (4, -4), (5, 0), (1, 5)\}$$

$$\text{fog}(x) = \{(-2, 5), (4, 0), (1, 1)\}$$

$$(0/25) (0/25) (0/25)$$

$$\text{gof}(x) = \{(1, 0), (5, 5)\}$$

$$(0/25) (0/25)$$

$$\frac{f}{g}(x) = \{(1, 1)\}$$

$$(0/25)$$

(کار در کلاس صفحه ۶۸ و تمرین ۵ صفحه ۶۹)

پاسخ خیلی تشریحی ✓

برای راحتی به دست آوردن تابع fog و gof می‌توانیم جدولی به صورت زیر برای هر کدام نوشت تا زوج مرتب‌ها را بباییم. در این جداول در ستون اول x ورودی‌های تابع داخل و ستون دوم خروجی‌های تابع داخلی هستند و در ستون آخر خروجی‌هایی که در ستون دوم هستند، به عنوان ورودی تابع بیرونی می‌بینیم و در نهایت اگر در تابع بیرونی وجود داشت خروجی آن را در ستون سوم می‌نویسیم. برای نوشتن زوج مرتب آن مؤلفه اول از ستون x و مؤلفه دوم در صورت وجود از ستون آخر است.

$\text{fog} : f(g(x))$	x	$g(x)$	$f(g(x))$	$\text{gof} : g(f(x))$	x	$f(x)$	$g(f(x))$
	-2	1	5		1	5	0
	4	-4	0		2	3	x
	5	0	x		-4	0	x
	1	5	1		5	1	5

$$\text{fog} = \{(-2, 5), (4, 0), (1, 1)\}$$

$$\text{gof} = \{(1, 0), (5, 5)\}$$

برای پیدا کردن $\frac{f}{g}$ طبق تعریف زوج مرتب‌هایی که دامنه مشترک دارند و $g(x) \neq 0$ است را پیدا می‌کنیم و عمل ریاضی را روی خروجی زوج مرتب مشترک اعمال می‌کنیم.

$$\text{زوج مرتب مشترک} : \{(1, 5)\}$$

$$\frac{f}{g} = \{(1, \frac{5}{5})\} = \{(1, 1)\}$$

۱۵ اگر $f(x) = \sqrt{x-5} + 1$ باشد با محاسبه ضابطه f^{-1} ، ضابطه $f^{-1} \circ f(x)$ را به دست بیاورید و رسم کنید. (۷ نمره)

راهنمای تصحیح

(صفحه ۶۹)

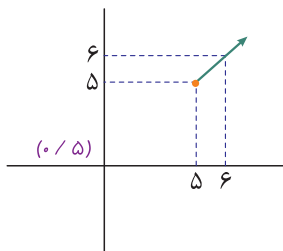
$$y = \sqrt{x-5} + 1$$

$$y-1 = \sqrt{x-5}$$

$$(y-1)^2 = x-5$$

$$x = (y-1)^2 + 5$$

$$f^{-1}(x) = (x-1)^2 + 5 \quad (۰/۵)$$



$$f^{-1}(f(x)) = (\sqrt{x-5} + 1 - 1)^2 + 5$$

$$= x \quad (۰/۵)$$

$$D_{f^{-1} \circ f} = D_f = [\Delta, +\infty)$$

(صفحه ۵۸)

$$D_{f^{-1} \circ f}(x) = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_{f^{-1}}\}$$

در توابع وارون پذیر:

با توجه به تعریف دامنه ترکیب توابع در بالا، و چون $f(x) \in D_{f^{-1}}$ همواره رخ می‌دهد، پس می‌توان نتیجه

$$\text{گرفت: } D_{f^{-1} \circ f}(x) = D_f(x)$$

* در حالت کلی اگر f تابعی وارون پذیر باشد، $f \circ f^{-1}(x) = x$ و $f^{-1} \circ f(x) = x$ فقط حواستون به دامنه باشد.

برای پیدا کردن ضابطه $f^{-1} \circ f(x)$ باید به فکر پیدا کردن وارون تابع f یعنی f^{-1} باشیم، پس:

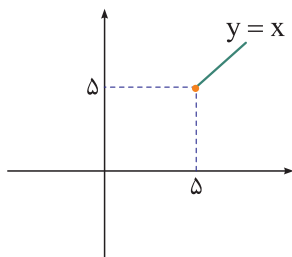
$$f(x) = \sqrt{x-5} + 1 \Rightarrow y = \sqrt{x-5} + 1 \Rightarrow y-1 = \sqrt{x-5} \Rightarrow (y-1)^2 = x-5$$

$$\Rightarrow x = (y-1)^2 + 5 \Rightarrow f^{-1}(x) = (x-1)^2 + 5$$

$$f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(f(x)) = (\sqrt{x-5} + 1 - 1)^2 + 5 = x - 5 + 5 = x$$

برای رسم نمودار $f^{-1} \circ f$ علاوه بر ضابطه به دامنه هم نیاز داریم.

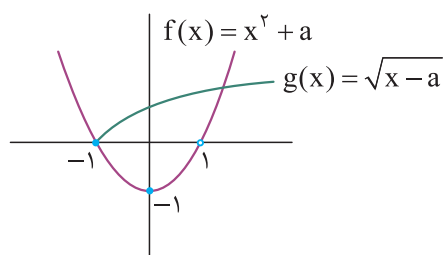
$$D_{f^{-1} \circ f} = D_f = x - 5 \geq 0 \Rightarrow x \geq 5$$



پاسخ خیلی تشریحی ✓

۱۶

با توجه به نمودارهای f و g رسم شده، مقادیر خواسته شده را به دست آورید. (۱ نمره)



الف) $(f + g)(2)$

ب) $\frac{f}{g}(0)$

ج) $(f - g)(3)$

د) $\text{fog}(\lambda)$

راهنمای تصحیح >> الف) $3 + \sqrt{3}$ (۰/۲۵)

ب) -1 (۰/۲۵)

ج) 6 (۰/۲۵)

د) 8 (۰/۲۵)

(تمرین ۱۰ صفحه ۷۰)

پاسخ خیلی تشریحی ✓

الف) $(f + g)(2) = f(2) + g(2) = 3 + \sqrt{3}$

ب) $\frac{f}{g}(0) = \frac{f(0)}{g(0)} = \frac{-1}{1} = -1$

ج) $(f - g)(3) = f(3) - g(3) = 8 - 2 = 6$

د) $\text{fog}(\lambda) = f(g(\lambda)) = f(3) = 8$