

حسابان (۲)

درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. (۵/۰ نمره)

الف) برای رسم نمودار تابع با ضابطه $g(x) = f(2x+1)$ ، ابتدا نمودار تابع با ضابطه $y = f(2x)$ را رسم کرده، سپس آن را یک واحد به سمت چپ انتقال می‌دهیم.

ب) دامنه تابع f با ضابطه $f(x) = \tan \frac{x}{2}$ به صورت $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2k\pi + \pi, k \in \mathbb{Z}\}$ است.

راهنمای تصحیح << الف) نادرست (۵/۰) (مثال صفحه ۱۰)

ب) درست (۵/۰) (صفحه ۳۲)

پاسخ خیلی تشریحی ✓ الف) برای رسم نمودار تابع با ضابطه $g(x) = f(2x+1)$ باید نمودار تابع با ضابطه $y = f(2x)$ را $\frac{1}{2}$ واحد به سمت چپ انتقال دهیم:

$$y = f(2x) \xrightarrow[x \rightarrow x + \frac{1}{2}]{\frac{1}{2} \text{ واحد به سمت چپ}} y = f(2(x + \frac{1}{2})) = f(2x + 1)$$

ب) تابع با ضابطه $g(x) = \tan x$ در نقاطی به طول $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ تعریف نشده است. بنابراین تابع f در نقاطی

تعریف می‌شود که $\frac{x}{2} \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$. در نتیجه می‌نویسیم:

$$\frac{x}{2} \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x \neq 2k\pi + \pi \Rightarrow D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2k\pi + \pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

جاهای خالی را با عدد یا عبارت ریاضی مناسب پر کنید. (۵/۰ نمره)

الف) درجهٔ تابع چندجمله‌ای f با ضابطهٔ $f(x) = (x^2 - 2)(x - x^2)$ برابر با است.

ب) خط به معادلهٔ مجانب قائم تابع با ضابطهٔ $f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 3x + 2}$ است.

راهنمای تصحیح >> الف) ۵ (۲۵/۰) کار در کلاس صفحه ۱۱۳

ب) $x = 2$ (۲۵/۰) مثال ۲ - صفحه ۵۶

پاسخ خیلی تشریحی ✓ ب) ابتدا ضابطهٔ تابع f را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 3x + 2} = \frac{(x+2)(x-1)}{(x-2)(x-1)} \Rightarrow f(x) = \frac{x+2}{x-2}, \quad x \neq 1$$

بعد از ساده‌شدن تابع فقط $x = 2$ مخرج تابع گویای f را صفر می‌کند. بنابراین می‌نویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x-2} = \pm\infty \Rightarrow \text{خط به معادلهٔ } x = 2 \text{ مجانب قائم تابع } f \text{ است.}$$

نقطه $A(x_0, y_0)$ روی نمودار تابع با ضابطه $y = f(x)$ قرار دارد. نقطه متناظر با A روی نمودار تابع با ضابطه

$g(x) = f(\frac{x}{3} - 3)$ کدام است؟ (۲۵/۰ نمره) (گزینه درست در پاسخبرگ نوشته شود)

(۱) $(\frac{x_0}{3} - 3, y_0)$

(۲) $(2x_0 + 3, y_0)$

(۳) $(\frac{x_0}{3} + 6, y_0)$

(۴) $(2x_0 + 6, y_0)$

راهنمای تصحیح «۴» (۲۵/۰) (کار در کلاس ۲ - صفحه ۵)

پاسخ خیلی تشریحی ✓ برای رسم نمودار تابع با ضابطه $g(x) = f(\frac{x}{3} - 3)$ با استفاده از نمودار تابع f مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

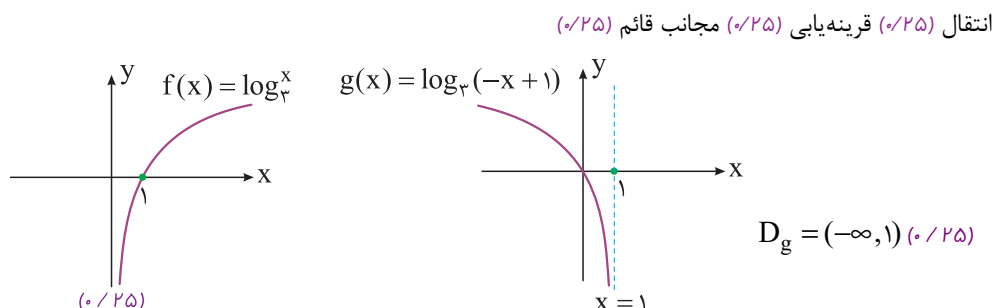
$$y = f(x) \xrightarrow[\text{نمودار تابع ۳ واحد به سمت راست}]{x \rightarrow x-3} y = f(x-3) \xrightarrow[\text{طول نقاط روی نمودار ۲ برابر}]{x \rightarrow \frac{x}{3}} g(x) = f(\frac{x}{3} - 3)$$

بنابراین مختصات نقطه $A(x_0, y_0)$ بعد از تبدیل تابع f به g به صورت زیر به دست می‌آید:

$$A(x_0, y_0) \xrightarrow[\text{نمودار تابع ۳ واحد به سمت راست}]{x \rightarrow x-3} A'(x_0 + 3, y_0) \xrightarrow[\text{طول نقاط روی نمودار ۲ برابر}]{x \rightarrow \frac{x}{3}} A''(2x_0 + 6, y_0)$$

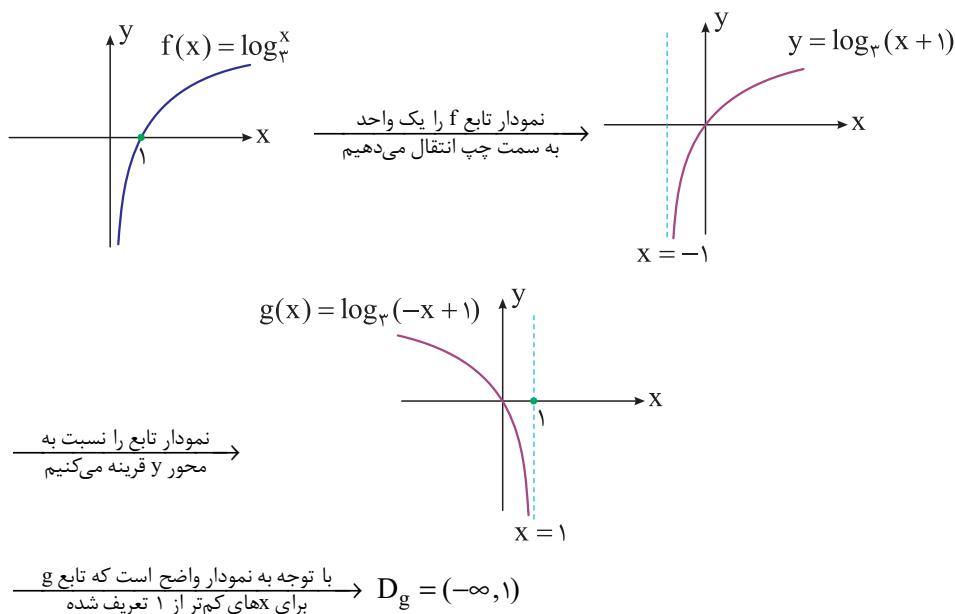
۴ ابتدا نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \log_3^x$ را رسم کنید، سپس نمودار تابع با ضابطه $g(x) = \log_3(-x+1)$ را به کمک قرینه‌یابی و انتقال نمودار تابع f رسم کرده و دامنه آن را مشخص کنید. (۱/۲۵ نمره)

راهنمای تصحیح



(کار در کلاس ۲ - صفحه ۵)

پاسخ خیلی تشریحی ✓ برای رسم نمودار تابع با ضابطه $g(x) = \log_3(-x+1)$ ، مراحل زیر را انجام می‌دهیم:



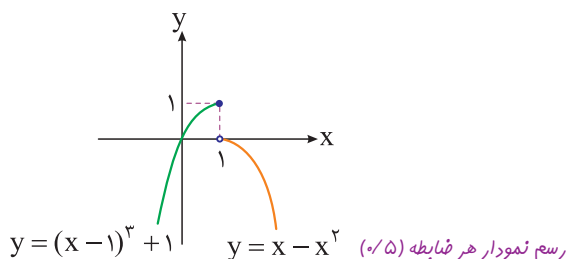
نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x^2 + 3x & x \leq 1 \\ x - x^2 & x > 1 \end{cases}$ را در نظر بگیرید. (۲ نمره)

الف) نمودار تابع را رسم کنید.

ب) بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع f روی آن اکیداً صعودی است را مشخص کنید.

پ) بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع f روی آن اکیداً نزولی است را مشخص کنید.

راهنمای تصحیح >>



ب) $(-\infty, 1]$ اکیداً صعودی (۰/۵)

پ) $[1, +\infty)$ اکیداً نزولی (۰/۵)

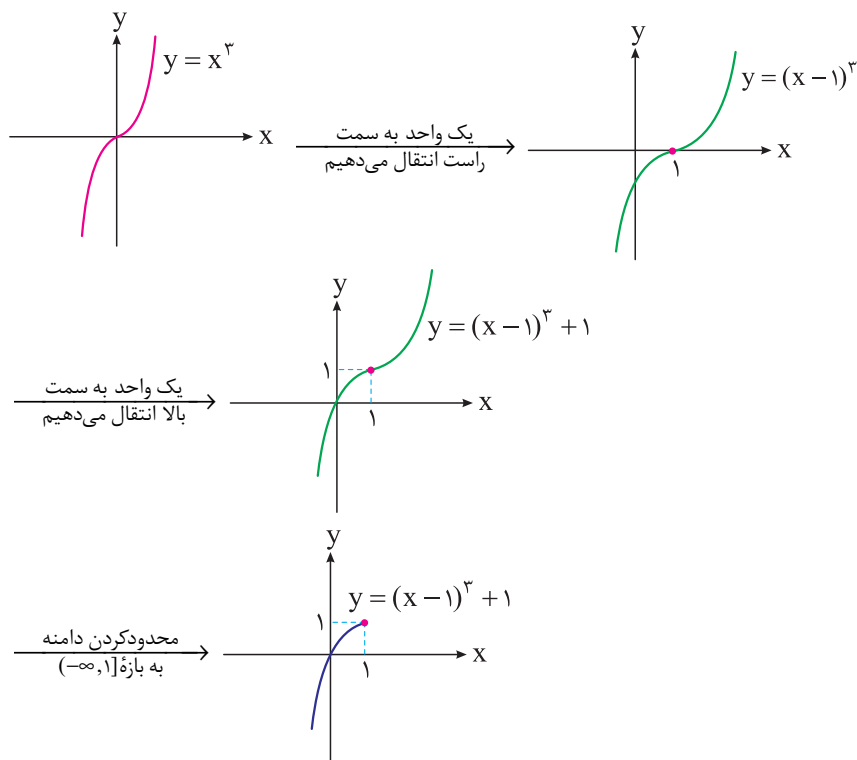
(کار در کلاس ۱ - صفحه ۱۴) (کار در کلاس ۲ - صفحه ۱۸)

پاسخ خیلی تشریحی ✓ الف) برای رسم نمودار تابع با ضابطه $g(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$ ، با استفاده از نمودار تابع با ضابطه $k(x) = x^3$ ،

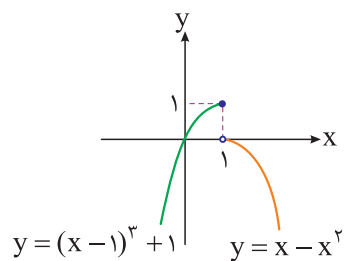
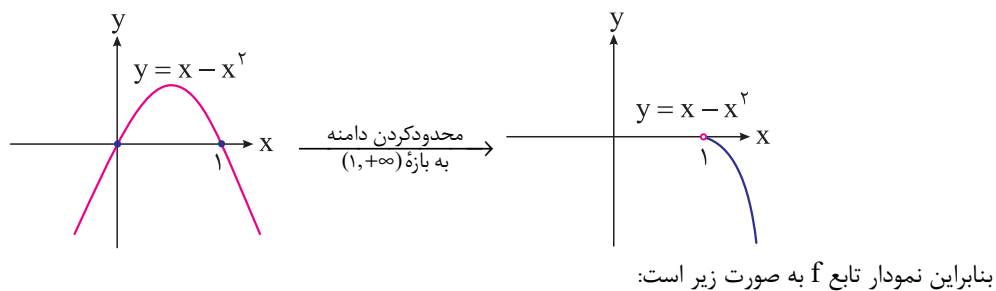
ابتدا آن را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$g(x) = x^3 - 3x^2 + 3x = \underbrace{x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 1}_{(x-1)^3} = (x-1)^3 + 1$$

اکنون تابع g را به کمک انتقال نمودار $k(x) = x^3$ به صورت زیر رسم می‌کنیم:



همچنین نمودار تابع با ضابطه $h(x) = x - x^2$ یک سهمی با دهانه رو به پایین است که در نقاط به طول‌های $x = 0$ و $x = 1$ محور x را قطع می‌کند. بنابراین:



ب) روی بازه $(-\infty, 1]$ با افزایش مقدار x ، مقادیر تابع نیز افزایش می‌یابند. بنابراین تابع f روی این بازه اکیداً صعودی است.

پ) روی بازه $[1, +\infty)$ با افزایش مقدار x ، مقادیر تابع کاهش می‌یابند. بنابراین تابع f روی این بازه اکیداً نزولی است.

اگر $(\frac{1}{\lambda})^{x+3} \leq (\sqrt{2})^{4x-6}$ ، آن گاه حدود x را به دست آورید. (۷۵/۰ نمره)

راهنمای تصحیح

$$(\sqrt{2})^{4x-6} \leq (\frac{1}{\lambda})^{x+3} \Rightarrow \underbrace{2^{2x-3} \leq 2^{-3x-9}}_{(۰/۲۵)} \Rightarrow \underbrace{2x-3 \leq -3x-9}_{(۰/۲۵)} \Rightarrow x \leq -\frac{6}{5} \quad (۰/۲۵)$$

(تمرین ۹ - صفحه ۲۲)

اگر تابع f روی دامنه‌اش اکیداً یکنوا باشد، آن گاه به ازای هر $a, b \in D_f$

تابع اکیداً صعودی جهت عوض نمی‌شود. $a \otimes b \Leftrightarrow f(a) \otimes f(b)$ اگر f اکیداً صعودی باشد (۱)

تابع اکیداً نزولی جهت عوض می‌شود. $a \otimes b \Leftrightarrow f(a) \oslash f(b)$ اگر f اکیداً نزولی باشد (۲)

درس Box

پاسخ خیلی تشریحی ✓ با توجه به این که $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$ و $\frac{1}{\lambda} = 2^{-3}$ ، بنابراین نامعادله را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$(\sqrt{2})^{4x-6} \leq (\frac{1}{\lambda})^{x+3} \Rightarrow (2^{\frac{1}{2}})^{4x-6} \leq (2^{-3})^{x+3} \Rightarrow 2^{2x-3} \leq 2^{-3x-9}$$

$$\xrightarrow[\text{تابع } y=2^x \text{ اکیداً صعودی است و جهت عوض نمی‌شود.}]{2x-3 \leq -3x-9} \Rightarrow 5x \leq -6 \Rightarrow x \leq -\frac{6}{5}$$

اگر چندجمله‌ای $P(x) = 2x^2 - (a+2)x + 1$ بر $x-a$ و $x-b$ بخش پذیر باشد، مقادیر a و b را به دست

آورید. ($a \neq b$) (۱/۲۵ نمره)

✓

راهنمای تصحیح

$$P(a) = 0 \Rightarrow \underbrace{2a^2 - (a+2)a + 1}_{(0/25)} = 0 \Rightarrow a^2 - 2a + 1 = 0 \Rightarrow a = 1 \quad (0/25)$$

$$P(x) = 2x^2 - 3x + 1 = \underbrace{(2x-1)(x-1)}_{(0/25)} = 2(x - \frac{1}{2})(x-1) \Rightarrow b = \frac{1}{2} \quad (0/5)$$

روش ۱

$$P(x) = 2x^2 - 3x + 1 \Rightarrow P(b) = 0 \Rightarrow \underbrace{2b^2 - 3b + 1}_{(0/25)} = 0 \Rightarrow \begin{cases} b = 1 \times (a \neq b) \\ b = \frac{1}{2} \checkmark (0/5) \end{cases}$$

روش ۲

(کار در کلاس ۲ - صفحه ۱۹)

پاسخ خیلی تشریحی ✓ چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-a$ بخش پذیر است، پس $P(a) = 0$ ، بنابراین:

$$P(x) = 2x^2 - (a+2)x + 1 \xrightarrow{P(a)=0} 2a^2 - (a+2)a + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$2a^2 - a^2 - 2a + 1 = 0 \Rightarrow a^2 - 2a + 1 = 0 \Rightarrow (a-1)^2 = 0 \Rightarrow a = 1$$

با توجه به اینکه $a = 1$ ، چندجمله‌ای $P(x)$ به صورت زیر خواهد بود:

$$P(x) = 2x^2 - 3x + 1$$

هم چنین $P(x)$ بر $x-b$ بخش پذیر است بنابراین برای محاسبه b ، چندجمله‌ای $P(x)$ را به صورت زیر تجزیه می کنیم:

$$P(x) = 2x^2 - 3x + 1 = \underbrace{(2x-1)}_{x-b} \underbrace{(x-1)}_{x-a}$$

در نتیجه $b = \frac{1}{2}$.

🌟 حواست باشه که! برای تجزیه چندجمله‌ای $P(x)$ می توانیم آن را بر $x-1$ تقسیم کنیم:

$$\begin{array}{r} 2x^2 - 3x + 1 \quad | \quad x-1 \\ \underline{2x^2 - 2x} \\ -x + 1 \\ \underline{-x + 1} \\ 0 \end{array}$$

تابع f با ضابطه $f(x) = a \cos(\frac{\pi}{a}x) + b$ و برد $[-8, -2]$ مفروض است. (۵/۱ نمره)

الف) مقادیر ممکن برای a و b را به دست آورید.

ب) دوره تناوب تابع f را به دست آورید.

راهنمای تصحیح

$$\text{الف) } \begin{cases} |a| + b = -2 \\ -|a| + b = -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |a| = 3 \Rightarrow a = \pm 3 \text{ (۰/۵)} \\ b = -5 \text{ (۰/۲۵)} \end{cases}$$

$$\text{ب) } T = \frac{2\pi}{|\frac{\pi}{a}|} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}} = 6 \text{ (۰/۵)}$$

(تمرین ۳ - صفحه ۳۴)

مقادیر ماکزیمم، مینیمم و دوره تناوب توابع با ضابطه‌های $f(x) = a \cos(bx) + c$, $f(x) = a \sin(bx) + c$

به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} f \text{ ماکزیمم تابع} &= |a| + c \\ f \text{ مینیمم تابع} &= -|a| + c \\ \text{دوره تناوب تابع } f &: T = \frac{2\pi}{|b|} \end{aligned}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ با توجه به اینکه برد تابع f بازه $[-8, -2]$ است، بنابراین ماکزیمم تابع برابر با -2 و مینیمم آن برابر با -8

است. در نتیجه می‌نویسیم:

$$\begin{cases} |a| + b = -2 \text{ (۱)} \\ -|a| + b = -8 \end{cases}$$

$$2b = -10 \Rightarrow b = -5 \xrightarrow{\text{جایگذاری در (۱)}} |a| - 5 = -2 \Rightarrow |a| = 3 \Rightarrow a = \pm 3$$

با توجه به مقادیر a و b ضابطه تابع f و دوره تناوب آن به یکی از دو صورت زیر است:

$$a = 3, b = -5 \Rightarrow f(x) = 3 \cos(\frac{\pi}{3}x) - 5 \xrightarrow{\text{دوره تناوب}} T = \frac{2\pi}{|\frac{\pi}{3}|} = 6$$

$$a = -3, b = -5 \Rightarrow f(x) = 3 \cos(-\frac{\pi}{3}x) - 5 \xrightarrow{\text{دوره تناوب}} T = \frac{2\pi}{|-\frac{\pi}{3}|} = 6$$

راهنمای تصحیح

$$\underbrace{2 + 3 \sin x = 1 - 2 \sin^2 x}_{(۰/۲۵)} \Rightarrow 2 \sin^2 x + 3 \sin x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \sin x = -1 \quad (۰/۲۵) \Rightarrow \left(x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \text{ یا } x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2} \right) \quad (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow \sin x = -\frac{1}{2} \quad (۰/۲۵) \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} & (۰/۲۵) \\ x = (2k+1)\pi + \frac{\pi}{6} \text{ یا } x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} & (۰/۲۵) \end{cases}$$

توضیحات جهت نمره گذاری: اگر معادله از طریق روش هندسی حل شود (رسم نمودار توابع و مشخص کردن دقیق محل تلاقی) به تناسب نمره تعلق گیرد.

(صفحه ۳۷)

اگر α یک زاویه دلخواه باشد، آن گاه:

درس Box

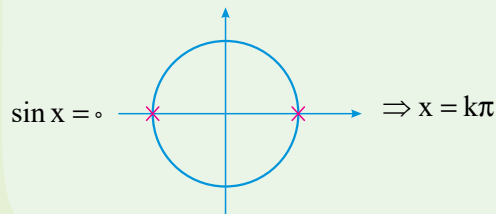
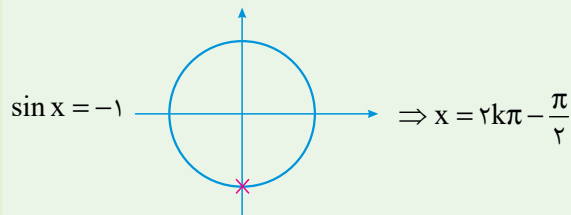
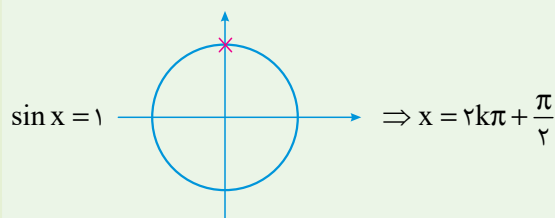
$$\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$$

جوابهای معادله مثلثاتی $\sin x = m$ با شرط $-1 \leq m \leq 1$ به صورت زیر است:

درس Box

$$\sin x = m \xrightarrow[\text{بطوری که } \sin \alpha = m]{\text{یک زاویه دلخواه مانند } \alpha \text{ پیدا می کنیم.}} \sin x = \sin \alpha \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi + \pi - \alpha \end{cases}$$

یه جور دیگه ➡ اگر در معادله $\sin x = m$ ، داشته باشیم $m = 1$ یا $m = -1$ یا $m = 0$ آن گاه جوابهای معادله به صورت زیر است:



معادله $\tan 3x = \tan x$ را در بازه $0 \leq x \leq 2\pi$ حل کنید. (۱/۲۵ نمره)

راهنمای تصحیح

$$\tan 3x = \tan x \Rightarrow 3x = k\pi + x \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} \quad (۰/۵)$$

k	۰	۱	۲	۳	۴
x	۰	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
	قق	غقق	قق	غقق	قق

توضیحات جهت نمره گذاری: در صورتی که $x = \frac{\pi}{2}$ یا $x = \frac{3\pi}{2}$ به عنوان جواب قابل قبول در نظر گرفته شده

است، (۰/۲۵) کسر گردد.

(مثال صفحه ۴۲)

جوابهای معادله مثلثاتی $\tan x = \tan \alpha$ به صورت زیر است:

$$\tan x = \tan \alpha \Rightarrow x = k\pi + \alpha$$

درس Box

پاسخ خیلی تشریحی ✓ ابتدا جوابهای کلی معادله $\tan 3x = \tan x$ را به دست می آوریم:

$$\tan 3x = \tan x \Rightarrow 3x = k\pi + x \Rightarrow 2x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}$$

⚡ حواست باشه که! $\tan x$ در نقاطی به طول $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ و همچنین $\tan 3x$ در نقاطی به طول $x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$

تعریف نشده هستند. بنابراین:

$$x = \frac{k\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} k=0 \Rightarrow x=0 \in [0, 2\pi] \text{ قق} \\ k=1 \Rightarrow x=\frac{\pi}{2} \in [0, 2\pi] \text{ غقق (} \tan 3x \text{ و } \tan x \text{ به ازای } x=\frac{\pi}{2} \text{ تعریف نشده هستند.)} \\ k=2 \Rightarrow x=\pi \in [0, 2\pi] \text{ قق} \\ k=3 \Rightarrow x=\frac{3\pi}{2} \in [0, 2\pi] \text{ غقق (} \tan 3x \text{ و } \tan x \text{ به ازای } x=\frac{3\pi}{2} \text{ تعریف نشده هستند.)} \\ k=4 \Rightarrow x=2\pi \in [0, 2\pi] \text{ قق} \end{cases}$$

اگر $\tan(y + \frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، آن گاه مقدار $\tan y$ را به دست آورید. (۷۲۵ نمره)

راهنمای تصحیح

$$\tan(y + \frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{\tan y + \tan \frac{\pi}{3}}{1 - \tan y \tan \frac{\pi}{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{\tan y + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3} \tan y} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \tan y = 3\sqrt{3} \quad (۰/۵)$$

(صفحه ۴۲)

اگر $\tan \alpha = \frac{2}{3}$ و $\tan \beta = -1$ باشد، آن گاه مقدار $\tan(\alpha + \beta)$ را محاسبه کنید. (۷۷۵ نمره) (سوال ۹ فرداد ۱۴۰۳)

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{\frac{2}{3} + (-1)}{1 - (\frac{2}{3})(-1)} = \frac{-\frac{1}{3}}{\frac{5}{3}} = -\frac{1}{5} \quad (۰/۲۵)$$

پاسخ: (صفحه ۴۲)

تانژانت مجموع دو زاویه از رابطه زیر به دست می آید:

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ با توجه به تانژانت مجموع دو زاویه می نویسیم:

$$\tan(y + \frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{\tan y + \tan \frac{\pi}{3}}{1 - \tan y \tan \frac{\pi}{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \xrightarrow{\tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}}$$

$$\frac{\tan y + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3} \tan y} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow -\sqrt{3} + 3 \tan y = 3 \tan y + 3\sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\tan y = 3\sqrt{3} + \sqrt{3} \Rightarrow \tan y = 3\sqrt{3}$$

حاصل حدهای زیر را در صورت وجود به دست آورید. (۲/۲۵ نمره)

الف) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{2x^2 - 7x + 3}{4x^2 - 4x + 1}$

ب) $\lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{[-x] - 3 \cos x}{\sin x}$

پ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + x|x| + 3}{x^2 - x|x| + 5}$

راهنمای تصحیح >> الف) (مثال ۲ - صفحه ۵۳)

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{2x^2 - 7x + 3}{4x^2 - 4x + 1} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{\overbrace{(2x-1)(x-3)}^{(0/0)}}{(2x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{x-3}{2x-1} = \frac{-2/5}{0^+} = -\infty \quad (0/5)$$

ب) (کار در کلاس و مثال ۱ - صفحه ۵۳)

$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{[-x] - 3 \cos x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\overbrace{-4 - 3 \cos x}^{(0/0)}}{\sin x} = \frac{-1}{0^-} = +\infty \quad (0/5)$$

پ) (تمرین ۳ - صفحه ۶۹)

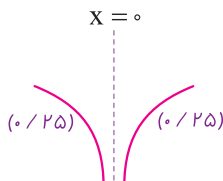
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + x|x| + 3}{x^2 - x|x| + 5} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - x^2}{\underbrace{x^2 + x^2}_{(0/0)}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2} \quad (0/5)$$

۱۳

نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{1}{x - |2x|}$ ، در مجاورت مجانب قائم خود چگونه است؟ (۱/۵ نمره)

راهنمای تصحیح

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{x} = \frac{-1}{0^+} = -\infty \quad (0/5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{3x} = \frac{1}{0^-} = -\infty \quad (0/5)$$


(تمرین ۶ - صفحه ۵۸)

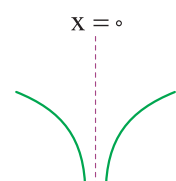
پاسخ خیلی تشریحی ✓ ابتدا تابع f را به صورت یک تابع دوضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x - 2x} & x > 0 \\ \frac{1}{x + 2x} & x < 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} & x > 0 \\ \frac{1}{3x} & x < 0 \end{cases}$$

با توجه به این که ریشه مخرج هر دو ضابطه $x = 0$ است و هر دو در یک همسایگی راست یا چپ $x = 0$ تعریف شده‌اند، بنابراین $x = 0$ تنها کاندیدای مجانب قائم است.

اکنون برای مشخص کردن رفتار تابع در همسایگی محذوف $x = 0$ می‌نویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{x} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{3x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$


اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^3 + 3x^2 + 1}{(2-a)x^2 + x - 3} = +\infty$ ، محدوده مقادیر قابل قبول برای a را به دست آورید. ($a \neq 0, 2$) (۱/۲۵ نمره)

۱۴

راهنمای تصحیح

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^3 + 3x^2 + 1}{(2-a)x^2 + x - 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^3}{(2-a)x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{\left(\frac{a}{2-a}\right)}_{(0/25)} x = +\infty \Rightarrow \underbrace{\frac{a}{2-a}}_{(0/25)} > 0 \Rightarrow \underbrace{0 < a < 2}_{(0/5)}$$

(کار در کلاس ۱ - صفحه ۶۶) (قضایای صفحه ۶۵)

اگر n یک عدد فرد باشد، آن گاه:

درس Box

۱) اگر a مثبت باشد $\lim_{x \rightarrow +\infty} (ax^n) = \underbrace{(a)}_{+} (+\infty) = +\infty$

۲) اگر a منفی باشد $\lim_{x \rightarrow +\infty} (ax^n) = \underbrace{(a)}_{-} (+\infty) = -\infty$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ با توجه به صورت سؤال چون $a \neq 0$ و $a \neq 2$ بنابراین حاصل حد داده شده به صورت زیر است:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^3 + 3x^2 + 1}{(2-a)x^2 + x - 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^3}{(2-a)x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{\left(\frac{a}{2-a}\right)}_{\oplus} (x) = +\infty$$

با توجه به اینکه حاصل حد $+\infty$ شده، بنابراین ضریب x یعنی $\frac{a}{2-a}$ نیز باید مثبت باشد، بنابراین:

$$\frac{a}{2-a} > 0 \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & -\infty & 0 & 2 & +\infty \\ p & - & + & - & \end{array} \Rightarrow 0 < a < 2$$

۱۵ تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{2x^2+x} & x < -2 \\ x-8 & -2 \leq x \leq 2 \\ 3 & x > 2 \end{cases}$ را در نظر بگیرید. حاصل هر یک از حدهای $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ را به دست آورید. سپس معادلهٔ مجانب(های) افقی تابع f را در صورت وجود بنویسید. (۱/۲۵ نمره)

راهنمای تصحیح >>

(۰/۲۵) معادلهٔ مجانب افقی تابع: $y = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2} \quad (۰/۵) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2-1}{2x^2+x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$

(۰/۲۵) معادلهٔ مجانب افقی تابع: $y = 3 \Rightarrow y = 3 \quad (۰/۲۵) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3 = 3$

(کار در کلاس ۱ - صفحه ۶۸) (تمرین ۴ - صفحه ۶۹)

خط به معادله $y = k$ در صورتی مجانب افقی تابع f است، که حداقل یکی از حالت‌های زیر رخ دهد:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = k \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = k$$

درس Box

پاسخ خیلی تشریحی ✓ ضابطهٔ تابع f در بازه $(-\infty, -2)$ به صورت $f(x) = \frac{x^2-1}{2x^2+x}$ است، بنابراین برای محاسبهٔ حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ از این ضابطه استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2-1}{2x^2+x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

چون $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{1}{2}$ ، بنابراین خط به معادله $y = \frac{1}{2}$ مجانب افقی تابع f است. همچنین ضابطهٔ تابع f در بازه $(2, +\infty)$ به صورت $f(x) = 3$ است، بنابراین برای محاسبهٔ حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ از این ضابطه استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3 = 3$$

چون $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$ ، بنابراین خط به معادله $y = 3$ مجانب افقی تابع f است.

📢 **حواست باشه که!** حد تابع ثابت با ضابطه $f(x) = k$ وقتی $x \rightarrow +\infty$ یا $x \rightarrow -\infty$ همواره برابر با k است. یعنی اگر $k \in \mathbb{R}$ آن‌گاه:

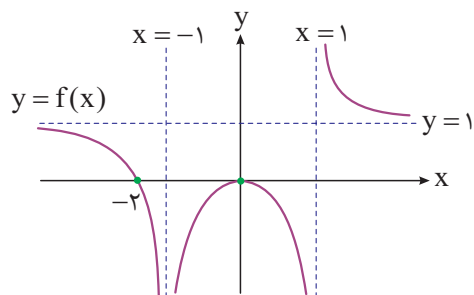
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (k) = k$$

با توجه به این موضوع می‌توان گفت تابع با ضابطه $f(x) = k$ دارای مجانب افقی به معادله $y = k$ است.

۱۶

نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. حاصل هر یک از حدود زیر را در صورت وجود به دست

آورید. (۱/۷۵ نمره)



الف) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x-1}{f(x)}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 1^+} (3x^2 + f(x))$

پ) $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x+3}{f(x)}$

ت) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

راهنمای تصحیح >>

الف) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x-1}{f(x)} = \frac{-4}{-\infty} = 0$ (۰/۵)

(مثال ۳ - صفحه ۵۳) (تمرین ۲ - صفحه ۶۹)

ب) $\lim_{x \rightarrow 1^+} (3x^2 + f(x)) = 3 + (+\infty) = +\infty$ (۰/۵)

(قضیه ۵ - صفحه ۵۴) (تمرین ۲ - صفحه ۶۹)

پ) $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x+3}{f(x)} = \frac{1}{0^+} = +\infty$ (۰/۵)

(قضیه ۳ - صفحه ۵۲) (تمرین ۲ - صفحه ۶۹)

ت) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ (۰/۲۵)

(تمرین ۲ - صفحه ۶۹)